

VASILICA BORDEA

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

note de curs

Editura Fundației „Andrei Șaguna”

CONSTANȚA
2002

Referenți științifici:

Acad. Prof. Univ. Dr. Ing. Viorel Maier

Conf. Univ. Dr. Ing. Mihail Pricop

I.S.B.N. –973-8146-46-1

Tipar executat la

Tipografia Fundației „Andrei Șaguna” Constanța

Editura Fundației „Andrei Șaguna” Constanța

Redactor șef de editură: Conf. univ. Dr. George Pruteanu

Constanța, str.1907, nr. 25, tel/fax:041/66.25.20

E-mail: editura@tomrad.ro

PREFAȚĂ

Această lucrare reprezintă redactarea cursului de Geometrie Descriptivă predat studenților din Academia Navală „Mircea cel Bătrân” din Constanța.

Manualul cuprinde materia prevăzută în programa analitică privitoare la geometria descriptivă.

Lucrarea are opt capitole, primele șapte dezvoltându-se în raport cu numărul de ore prevăzut în planul de învățământ.

Noțiunile teoretice pe care studenții le primesc la acest curs sunt aplicate direct la desen tehnic și utilizate la dobândirea cunoștințelor de la Organe de mașini, Tehnologia materialelor Navei, Navigație.

Ultimul capitol își propune să sporească motivația pentru această disciplină, studenților de la facultatea de Navigație.

În cuprins sunt folosite notații și simboluri cu care studenții au fost familiarizați în bună parte încă din liceu.

Pentru ajutorul acordat la redactare mulțumesc fiului meu Lucian și prietenei mele, tehnician proiectant Mihai Cornelia.

Autoarea

CUPRINS

Prefață.....	1
Cuprins.....	3
Introducere.....	5
Notatii și simboluri.....	6
Cap.1. Punctul.....	7
1.1 Metode de reprezentare plană a spațiului.....	7
1.2 Reprezentarea punctului pe trei plane de proiecție.....	16
1.3 Plane bisectoare.....	21
1.4 Citirea epurei punctului.....	22
1.5 Puncte date prin coordonate numerice.....	22
Probleme rezolvate.....	24
Probleme propuse spre rezolvare.....	25
Cap. 2. Dreapta.....	27
2.1 Reprezentarea dreptei.....	27
2.2 Urmele dreptei. Determinarea urmelor.....	29
2.3 Pozițiile particulare ale unei drepte.....	30
2.4 Intersecțiile unei drepte cu planele bisectoare.....	35
2.5 Împărțirea unei drepte în regiuni. Citirea epurei unei drepte..	35
2.6 Pozițiile relative a două drepte.....	36
Probleme rezolvate.....	40
Probleme propuse spre rezolvare.....	42
Cap. 3. Planul.....	43
3.1 Reprezentarea planului.....	43
3.2 Dreapta și punctul ce aparțin unui plan.....	45
3.3 Determinarea planului dat prin proiecțiile a două drepte concurente.....	46
3.4 Drepte remarcabile ale unui plan.....	46
3.5 Plane particulare.....	50
3.6 Pozițiile relative a două plane.....	55
3.7 Pozițiile drepte față de un plan.....	56
3.8 Perpendicularitate.....	57
Probleme rezolvate.....	59
Probleme propuse spre rezolvare.....	60
Cap. 4. Metodele geometriei descriptive.....	61
4.1 Schimbarea planelor de proiecție, rotația, rabaterea – generalități.....	61
4.2 Rabaterea unui punct, construind triunghiul de rabatere (poziția).....	61

4.3 Rabaterea unei drepte particulare a planului.....	64
4.4 Rabaterea de nivel.....	64
4.5 Rabaterea planelor proiectate.....	65
4.6 Ridicarea rabaterii.....	66
Probleme rezolvate.....	69
Probleme propuse spre rezolvare.....	71
Cap. 5. Poliedre.....	73
5.1 Definiții.....	73
5.2 Reprezentarea poliedrelor.....	74
5.3 Punct pe suprafața unui poliedru.....	75
5.4 Secțiuni plane în poliedre.....	75
5.5 Intersecția dintre o dreaptă și un poliedru.....	82
Probleme rezolvate.....	85
Probleme propuse spre rezolvare.....	88
Cap. 6. Suprafețe conice și cilindrice.....	91
6.1 Reprezentarea conurilor și cilindrilor.....	91
6.2 Secțiuni plane în suprafețele conice și cilindrice.....	94
6.3 Intersecția dintre o dreaptă și o suprafață cilindro-conică.....	100
Probleme rezolvate.....	101
Probleme propuse spre rezolvare.....	105
Cap. 7. Sfera.....	107
7.1 Definiții. Reprezentarea. Determinarea unui paralel.....	107
7.2 Punct pe suprafață. Planul tangent într-un punct pe suprafață.....	108
7.3 Secțiunea printr-un plan proiectant.....	109
7.4 Secțiunea printr-un plan oarecare.....	110
7.5 Intersecția dintre o dreaptă și o sferă.....	111
Probleme rezolvate.....	115
Probleme propuse spre rezolvare.....	117
Cap. 8. Aprecieri privind necesitatea cunoștințelor de geometrie descriptivă în dobândirea și înțelegerea informațiilor din cuprinsul disciplinelor parcurse în pregătirea viitorilor ofițeri de marină.....	119
Bibliografie.....	125

Introducere

Din cele mai vechi timpuri, arta construcțiilor a condus la reprezentarea corpurilor din spațiu pe unul sau mai multe plane.

Descoperirile arheologice au demonstrat că oamenii știau să folosească desene în organizarea muncii în timpul construcțiilor de case, caracterul acestor desene evidențiind faptul că oamenii aveau imaginea proiecției ortogonale.

De-a lungul timpului au apărut reprezentări intuitive apropiate ca aspect de reprezentările axonometrice de astăzi. Dovezile de la sfârșitul secolului al XVIII-lea certifică utilizarea proiecțiilor pe două plane.

Acumularea în timp a diferitelor concepții în această direcție a permis ca, la sfârșitul secolului al XVIII-lea, savantul francez Gaspard Monge să creeze o știință pe care el a numit-o „geometrie descriptivă” și a contribuit la răspândirea ei atât în Franța cât și în țările cu care aceasta avea legături.

La noi în țară, elemente de geometrie descriptivă au fost predate la Iași la Școala de ingineri hotarnici, de către Gheorghe Asachi (1814) și la București de către Gheorghe Lazăr, la Sf. Sava, unde se făcea un curs de inginerie (1818).

În domeniul predării geometriei descriptive s-au remarcat: Șt. Emilian, V. Costin, E. Pangratti, George Nichifor, Stănilescu Gheorghe, Mihăilescu Isidor și alții.

Geometria descriptivă este o parte a matematicilor aplicate și are ca scop descrierea completă (poziție și formă) a figurilor cu trei dimensiuni cu ajutorul proiecțiilor acestora pe unul sau mai multe plane. Ea formează baza teoretică a desenului tehnic și contribuie la formarea deprinderii de a gândi științific, dezvoltă posibilitatea de a vedea în spațiu, de a distinge aranjarea armonioasă a diferitelor forme și estetica acestora.

Pentru inginer, știința geometriei descriptive este absolut necesară, aceasta călăuzindu-l în reprezentarea corectă și apoi în executarea pieselor, subansamblelor, ansamblelor, mașinilor, instalațiilor

Geometria are ca obiect studiul proprietăților spațiului considerat ca mulțimea continuă a unei infinități de elemente. Aceste elemente pot fi puncte, drepte sau plane. Noțiunile de punct, dreaptă și plan sunt ireductibile, adică nu se poate deduce una din ele din cunoașterea celorlalte două, dar ele nu sunt independente.

Spațiul generat de punct se numește spațiu punctual. Dacă dreapta sau planul este elementul generator atunci spațiul poartă denumirea de spațiu riglat sau spațiu planat.

Se numește dimensiune a unui spațiu, numărul de coordonate necesare pentru a defini poziția în spațiul considerat, a unui punct oarecare.

După această definiție dată de Descartes, punctul este un spațiu cu zero dimensiuni (S_0), dreapta are o dimensiune (S_1), planul două dimensiuni (S_2), iar ceea ce se înțelege obișnuit prin spațiu-dotat cu lungime, lățime și înălțime – este un spațiu cu trei dimensiuni (S_3)

Notatii:

Punctul, dreapta, planul se notează cu litere mari.

Exemplu:

$\dot{A}$ - se citește punctul A;

$\overline{D}$ - se citește dreapta D;

$[P]$ - se citește planul P.

Proiecțiile punctelor și dreptelor se notează cu litere mici însoțite de accente pentru a deosebi planele la care se referă.

$\dot{M}(m, m', m'')$ - se citește punctul M de proiecții m, m' și m'';

- m este proiecția pe planul orizontal;

- m' este proiecția pe planul vertical;

- m'' este proiecția pe planul lateral.

$\overline{D}(d, d', d'')$ - se citește dreapta D de proiecții d, d' și d'' .

Simboluri:

$\parallel$ - paralel;

$\perp$ - perpendicular;

$\angle$ oblic;

$\overline{D} \nparallel [P]$ - incident ($\overline{D} \nparallel [P]$ - dreapta D este incidentă cu planul P);

$\longleftrightarrow$ - corespondență;

$\Rightarrow$ - implicație logică;

$\equiv$ - egal și paralel;

$<, >$ - relații de ordine;

$| -$ - distanță;

$\in$ - apartenență;

$\notin$ - nonapartenență;

$\equiv$ - identic;

$\cup$ - reuniune;

$\cap$ - intersecție;

$\subset$ - incluziune.

Cap 1. Punctul.

- În sistemele de proiecție, prezentate în prima parte a capitolului, se obțin imagini (proiecții) ale punctelor din spațiu pe unul sau mai multe plane de proiecție conform definiției sistemelor. Figurile spațiale ale sistemelor se transformă în figuri plane – numite epure. Punctele date prin coordonate numerice se reprezintă în epură prin proiecțiile lor pe planele de proiecție ale sistemului dublu sau triplu ortogonal. Funcție de poziția proiecțiilor punctelor față de axele sistemului, reprezentate în epură, se determină poziția în spațiu a punctelor, în raport cu planele de proiecție, cu planele bisectoare sau cu axele sistemului.

Obiective

- Să definească sistemele de proiecție;
- să definească epura;
- să identifice diedrele și triedrele sistemelor dublu și triplu ortogonal
- să definească planele bisectoare ale diedrelor;
- să reprezinte epura în două proiecții a punctului;
- să reprezinte epura în trei proiecții a punctului
- să reprezinte în epură puncte din planele bisectoare;
- să reprezinte în epură (două și trei proiecții) puncte date prin coordonate numerice;
- să determine cea de-a treia proiecție a unui punct, date fiind celelalte două;
- să stabilească poziția în spațiu a unui punct dat prin proiecțiile lui în epură

1.1 Metode de reprezentare plană a spațiului.

Fie $\dot{M} \in S$ și $\dot{M}' \in S'$. Dacă între punctele celor două spații S și S' s-a stabilit o corespondență astfel încât $\dot{M} \leftrightarrow \dot{M}'$, figurii $F \subset S$ îi corespunde o figură F' numită imagine, cuprinsă în S' .

Relația $F \leftrightarrow F'$ permite construirea figurii F cunoscând imaginea sa F' .

Dacă S este un spațiu cu trei dimensiuni și S' , spațiu cu două dimensiuni, atunci corespondența $S_3 \leftrightarrow S_2$ permite construirea unui obiect din S_3 după imaginea sa din S_2 (plan).

Relația $\dot{M} \leftrightarrow \dot{M}'$ este posibilă între toate punctele celor două spații când corespondența este biunivocă.

Pentru a realiza o reprezentare plană a spațiului cu trei dimensiuni trebuie să se găsească în plan un element care să depindă de trei parametri, deci unui punct din spațiu, îi corespunde o pereche de puncte, care se numește bipunct și care satisface o condiție particulară, ce reduce la trei numărul de parametri de care depind cele două puncte. Pentru obținerea figurilor în geometria descriptivă este folosită metoda proiecțiilor.

Un ansamblu organizat de elemente (puncte, drepte, plane) formează sistemul de proiecție.

Sisteme de proiecție utilizate în geometria descriptivă:

- a) proiecția centrală;
- b) proiecția paralelă;
- c) proiecția cotată;
- d) proiecția stereografică;
- e) proiecția axonometrică;

f) dubla proiecție ortogonală.

a) Proiecția centrală

Fie planul H de proiecție, punctul fix O , exterior lui, numit centru de proiecție și un punct M din spațiu, diferit de $\dot{O}$.

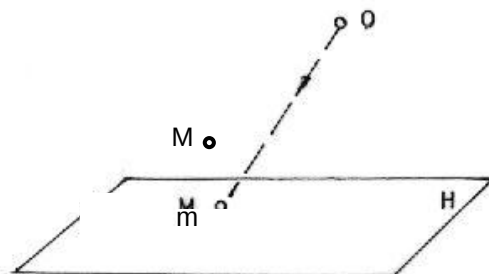


fig. 1

Unind $\dot{O}$ cu $\dot{M}$ obținem o dreaptă care intersectează planul H în punctul m . Dreapta OM se numește proiectantă, m este imaginea lui $\dot{M}$ pe planul H – proiecția centrală a punctului M . (fig.1)

Cum toate punctele dreptei OM au aceeași proiecție centrală m , rezultă că, fiind cunoscută proiecția centrală a unui punct, poziția în spațiu a punctului proiectat este nedeterminată.

Punctele situate într-un plan $P \parallel [H]$, care trece prin centrul O de proiecție, au proiecțiile lor centrale aruncate la infinit, iar cele situate în planul de proiecție coincid cu proiecțiile lor.

Proiecția centrală a centrului de proiecție este nedeterminată.

Proiecția centrală a unei drepte D este o dreaptă determinată de punctul u de intersecție al dreptei D cu $[H]$ și punctul f , în care o dreaptă $D_1 \parallel D$ dusă prin $\dot{O}$ intersectează $[H]$.

Punctul u se numește urma dreptei iar punctul f se numește punctul limită sau punctul de fugă. (fig.2)

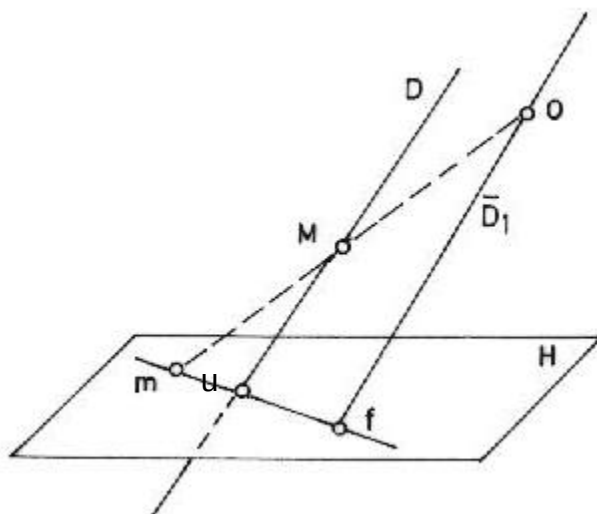


fig. 2

Din cele prezentate rezultă:

- două drepte paralele au același punct de fugă, iar proiecțiile lor centrale sunt concurente în punctul de fugă;
- două drepte concurente au proiecțiile centrale concurente iar dreapta urmelor este paralelă cu dreapta punctelor de fugă.

b) Proiecția paralelă

Dacă centrul de proiecție din sistemul precedent este aruncat la infinit într-o direcție (Δ), proiectantele devin paralele cu direcția Δ , iar proiecția se numește paralelă sau cilindrică. (fig.3)

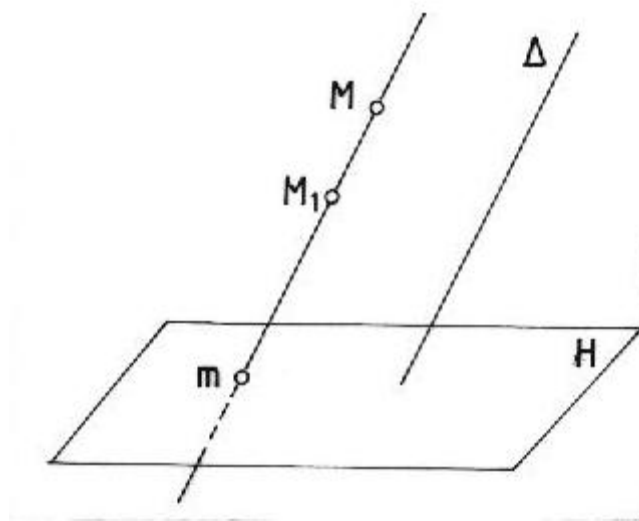


fig.3

Proiecția paralelă poate fi ortogonală sau oblică după cum direcția Δ este ortogonală sau oblică față de planul de proiecție.

Direcția cu care proiectantele sunt paralele și planul de proiecție formează sistemul paralel de proiecție.

Prin acest sistem de proiecție se stabilește o corespondență univocă între punctele din spațiu și punctele din planul de proiecție, deoarece unui punct din spațiu îi corespunde un singur punct din planul de proiecție.

Toate punctele unei proiectante au aceeași proiecție în acest sistem de proiecție și deci în spațiu poziția punctului este nedeterminată.

Proprietăți:

- proiecția paralelă a unei drepte este o dreaptă;
- proiecțiile paralele a două drepte paralele sunt paralele;
- proiecțiile paralele a două drepte concurente sunt concurente.

O figură cuprinsă într-un plan paralel cu planul de proiecție se proiectează oblic în adevărata mărime.

Dacă direcția Δ este perpendiculară pe planul de proiecție, proiecția se numește ortogonală. Toate proprietățile proiecției paralele oblice se extind fără excepție asupra proiecției ortogonale.

c) Proiecția cotată

Fiind dat un plan de proiecție H și un punct oarecare M din spațiu (fig.4), numim proiecția cotată a lui M pe planul H , proiecția sa ortogonală m pe acest plan, lângă care se înscrie cota sa în raport cu planul H .

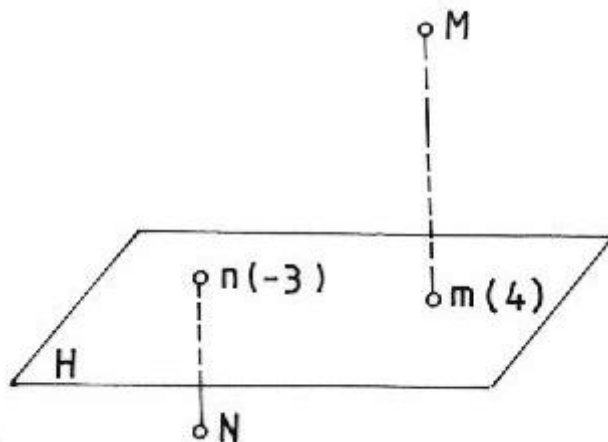


fig.4

Dacă punctul este deasupra planului H , cota sa este pozitivă, dacă este situat sub planul de proiecție, cota este negativă. Toate proprietățile proiecției paralele se extind asupra acestui sistem de proiecție.

d) Proiecția stereografică

Fie o sferă O și un plan P , tangent la sferă în punctul t (fig.5)

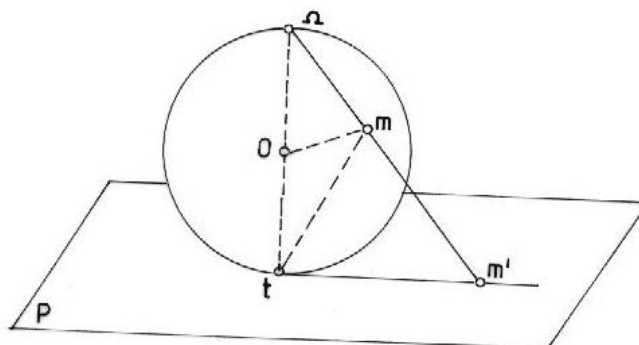


fig. 5

Considerând o extremitate Ω a diametrului sferei care trece prin t , centrul de proiecție, se poate stabili o corespondență între punctele sferei și acelea ale planului P , astfel încât unui punct al sferei îi corespunde un punct din plan și reciproc.

Fie un punct m de pe sferă și m' proiecția lui centrală pe planul P .

$$\triangle t m \Omega \sim \triangle t m' \Omega (\widehat{t m \Omega} = \widehat{t m' \Omega} = 90^\circ; t \Omega m' = \text{comun}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega m}{\Omega t} = \frac{\Omega t}{\Omega m'} \Rightarrow \Omega m \cdot \Omega m' = \Omega t^2 = ct.$$

$$\Omega m \cdot \Omega m' = 4R^2 = ct.$$

Punctele planului P sunt transformatele prin inversiune ale punctelor sferei. Corespondența astfel stabilită între punctele sferei și cele ale planului este biunivocă. Punctul t , de tangență, este propriul său transformat iar Ω (polul transformării inverse) are ca transformat un punct impropriu.

Se poate demonstra că:

- proiecția stereografică a unui cerc care nu trece prin pol, este un cerc (fig.6).

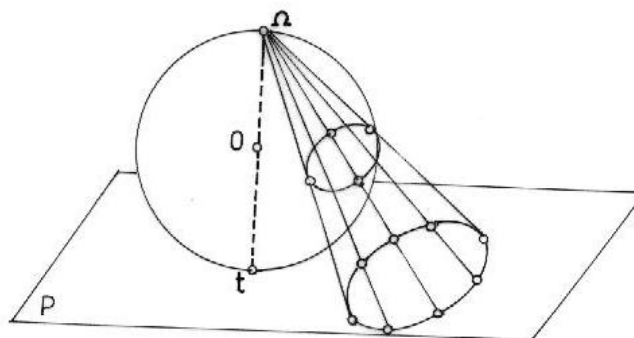


fig.6

- proiecția stereografică a unui cerc care trece prin pol, este o dreaptă (fig.7a).

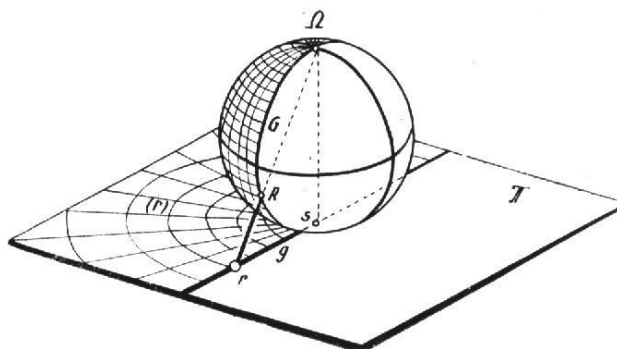


fig. 7a

Imaginea stereografică a meridianelor este dată de un fascicul de drepte concurente în punctul de tangență iar proiecția stereografică a cercurilor paralele cu planul de proiecție, ortogonale pe meridiane, este un fascicul de cercuri concentrice cu cercul în punctul t .

Utilizarea proiecțiilor stereografice:

- diagrama orientării antenelor (fig.7b);

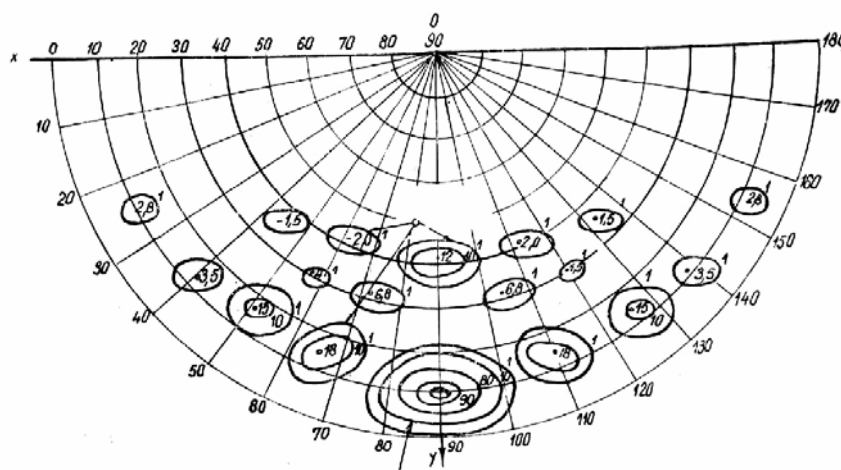


fig.7b

e) Proiecția axonometrică

Prin proiecții ortogonale pe două sau trei plane de proiecție se determină perfect poziția corpurilor în spațiu, însă datorită unor proiecții suprapuse pe unul din planele de proiecție se intuiește mai greu forma corpurilor.

O imagine intuitivă a corpului geometric se poate obține proiectându-l pe un plan oarecare P după o direcție dată.

Acesta este planul axonometric și intersectează triedrul de proiecție H, V, W după triunghiul axonometric A, B, C (fig. 8).

Proiectând ortogonal centrul O în O_1 pe planul axonometric P ($OO_1 \perp [P]$), axele Ox, Oy, Oz se vor proiecta pe planul axonometric după O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 , formând axele axonometrice.

Dacă proiectantele sunt perpendiculare pe planul axonometric P reprezentarea axonometrică este ortogonală, iar dacă proiectantele sunt oblice față de planul P , atunci reprezentarea axonometrică este oblică.

În practică este utilizată reprezentarea axonometrică ortogonală.

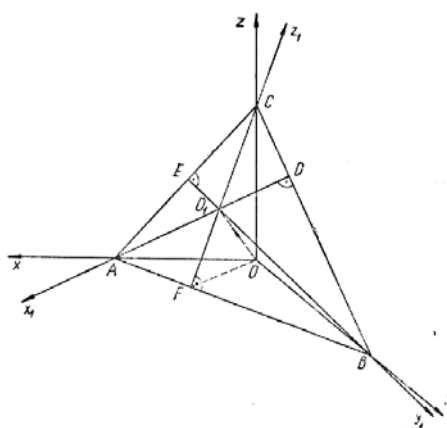


fig.8

Dacă planul considerat taie pe axele triedrului tridreptunghic segmente egale, triunghiul axonometric este echilateral, iar axonometria este izometrică, dacă numai două segmente tăiate sunt egale, axonometria este dimetrică, iar dacă segmentele tăiate pe axe au măsuri diferite, axonometria este anizometrică.

Un punct oarecare M din spațiu este reprezentat prin proiecția ortogonală M_1 pe $[ABC]$ și prin proiecția lui m pe planul $[ABC]$ (fig.)

Proiecția M_1 pe planul axonometric se numește proiecție principală, iar proiecția m_1 a proiecției m pe planul axonometric se numește proiecție secundară.

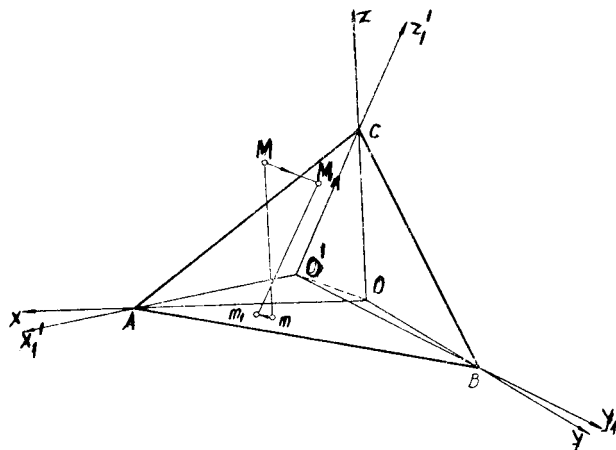


fig.9

În mod analog, se pot afla proiecțiile secundare: verticală m_1' și laterală m_1'' , ale proiecțiilor ortogonale m' și m'' .

Imaginea axonometrică a unui punct M este constituită de proiecția principală M_1 și una din proiecțiile secundare (m_1 , m_1' , m_1''); ea determină precis poziția punctului M din spațiu.

Imaginea axonometrică a unei drepte se obține cu ajutorul imaginilor axonometrice ale punctelor în care dreapta întâlnește planele reperului.

Se încheie această scurtă prezentare a sistemului axonometric prin imaginea axonometrică izometrică a unei piulițe hexagonale în trei poziții

- baza piuliței paralelă cu $[H]$;
- baza piuliței paralelă cu $[V]$;
- baza piuliței paralelă cu $[W]$ (fig. 10).

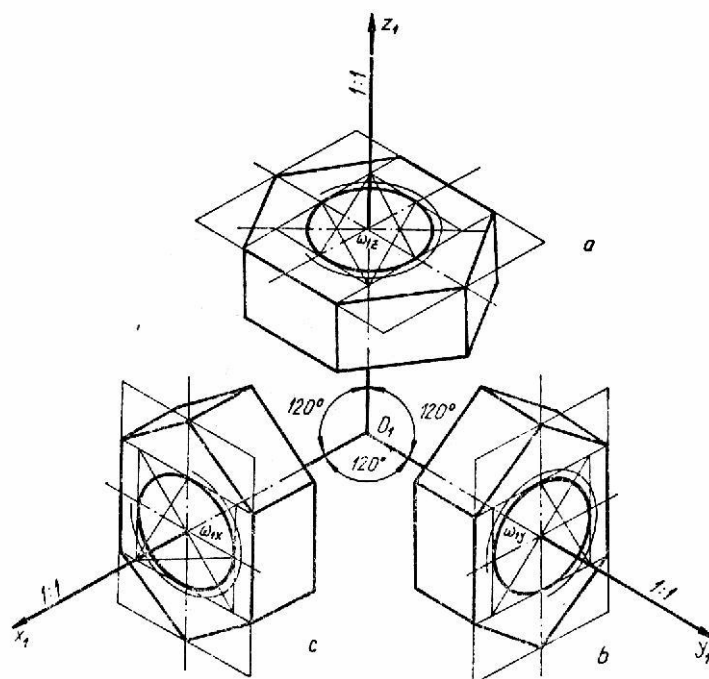


fig.10

f) Dubla proiecție ortogonală

Considerând două plane de proiecție perpendiculare între ele [H] și [V], unde H este plan orizontal iar V este plan vertical.

Dreapta de intersecție a celor două plane se notează Ox și se numește **linie de pământ** (fig. 11).

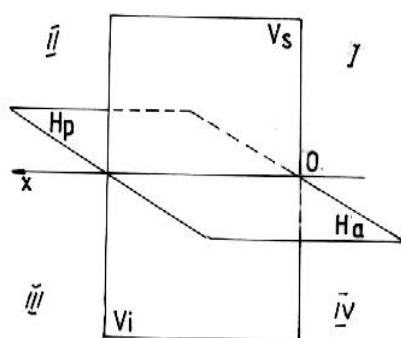


fig.11

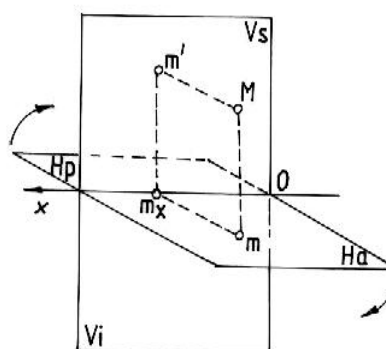


fig.12

Linia de pământ împarte planul H și planul V în patru semiplane notate și numite astfel:

H_a – planul orizontal anterior;

H_p – plan orizontal posterior;

V_s – plan vertical superior;

V_i – plan vertical inferior.

Cele două plane formează un sistem de referință sau reper. Acest reper împarte spațiul în patru unghiuri diedre drepte care se notează în sens trigonometric: I, II, III, IV.

Punctele și dreptele din spațiu se proiectează ortogonal pe planele H și V.

Proiecția unui element din spațiu se notează cu literă mică neaccentuată pe planul orizontal și accentuată pe planul vertical (fig.12).

Punctul M se notează prin $\dot{M}(m, m')$ care se citește „punctul M de proiecții m și m' ”.

Planul $[Mmm']$, conținând perpendiculare pe $[H]$ și pe $[V]$, este perpendicular pe linia de pământ, iar punctul său de intersecție cu Ox este m_x .

Dacă se rotește planul H (în sensul arătat de săgeți), în jurul liniei de pământ, până se suprapune pe planul V, se obține o figură plană numită **epură** (fig.13a,b).

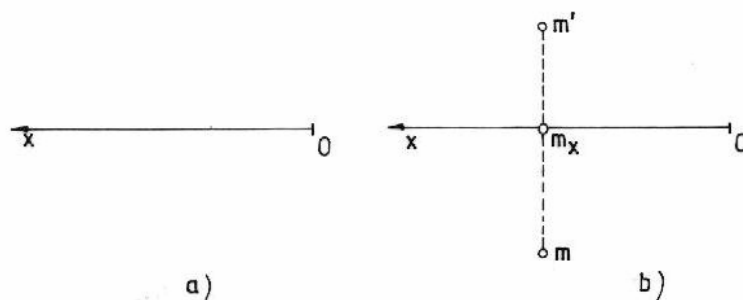


fig.13

Punctele m și m' se vor găsi pe o dreaptă perpendiculară pe $\overline{Ox}$ în m_x (fig.10a,b).

Dreapta care unește punctele m și m' , se numește linie de ordine și se trasează cu linie întreruptă subțire.

Perechea de puncte (m, m') se numește bipunct orientat deoarece m și m' au semnificații diferite. Fiind dat în epură, bipunctul (m, m') se determină poziția în spațiu a punctului M. Întotdeauna este satisfăcută relația:

$$\dot{M} \leftrightarrow (m, m')$$

Segmentul mm_x măsoară distanța de la punctul M la planul vertical de proiecție și se numește depărtare, segmentul m_xm' , măsoară distanța de la punct la planul orizontal și se numește cotă.

În figura 14 sunt reprezentate puncte în fiecare diedru atât în spațiu cât și în epură.

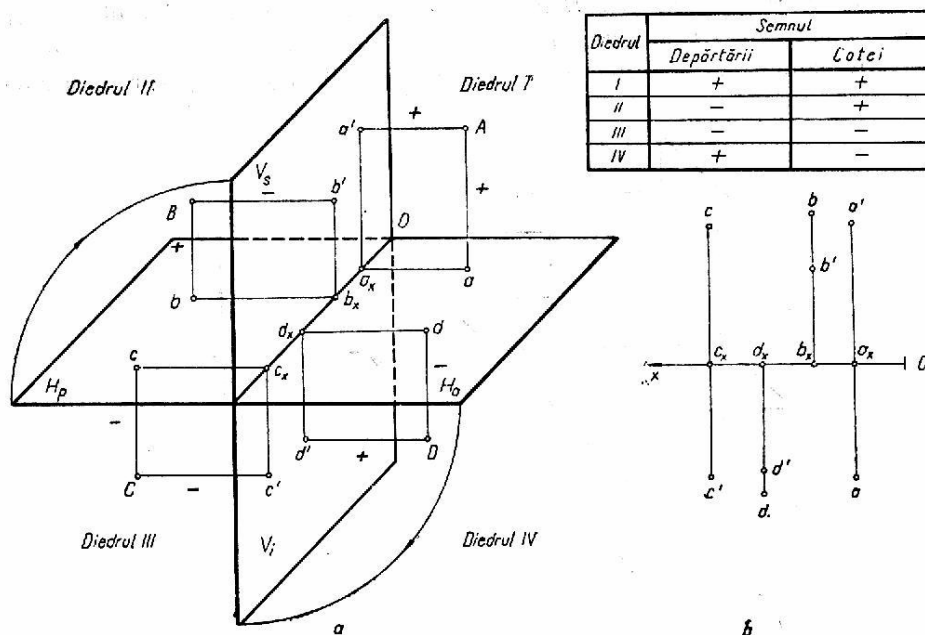


fig.14

Depărtările punctelor situate în fața planului vertical se consideră pozitive (+), iar cele situate în spatele planului vertical, negative (-).

Cotele punctelor situate deasupra planului orizontal sunt pozitive (+), iar cele situate sub planul orizontal sunt negative (-). Semnele cotelor și depărtărilor corespunzătoare celor patru diedre sunt reprezentate în tabelul alăturat figurii.

1.2 Reprezentarea punctului pe trei plane de proiecție.

Reprezentarea dublu ortogonală a obiectelor pe planul orizontal și vertical nu redă totdeauna suficient de complet și de sugestiv toate particularitățile în ceea ce privește forma obiectului proiectat. De aceea se obișnuiește să se utilizeze un reper alcătuit din trei plane de proiecție [H], [V], [W], perpendiculare două câte două, care se intersectează după axe Ox, Oy și Oz.

Planul notat cu W se numește plan lateral de proiecție (fig.15).

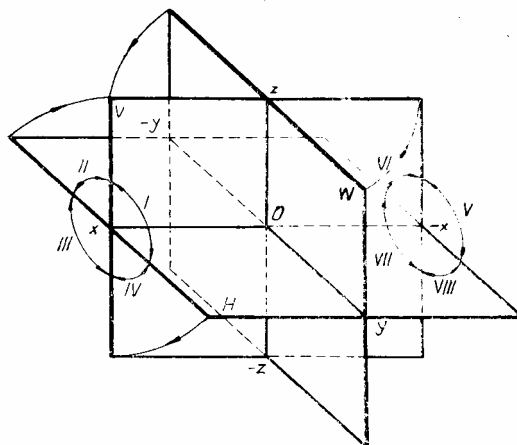


fig.15

Spațiul este împărțit de aceste plane în opt triedre numerotate ca în figură.

Fiecare axă va avea un sens pozitiv și unul negativ. Primele patru triedre coincid cu cele patru diedre, având abscisele pozitive. Ultimile patru triedre au abscisele negative, iar numărul lor de ordine este cel al diedrului, plus patru.

Fie un punct din spațiu, $M \in I$, care se proiectează ortogonal pe cele trei plane de proiecție. Imaginile lui M pe $[H]$, $[V]$ și $[W]$ se notează cu m , m' , m'' și se numesc proiecția orizontală, verticală și respectiv laterală. Proiectantele punctului M , determină plane perpendiculare pe planele de proiecție și care intersectează axele reperului în punctele m_x , m_y , m_z (fig.16)

Pentru a trece de la spațiul cu trei dimensiuni la spațiul cu două dimensiuni, se rotește planul H în jurul axei Ox și se suprapune pe planul vertical (în sensul indicat de figura 16), iar planul lateral se rotește în jurul axei Oz , spre dreapta, până se suprapune pe planul vertical de proiecție. Axa Oy se rotește odată cu $[W]$ și se suprapune pe axa Ox și se notează Oy_1 . Se obține astfel epura.

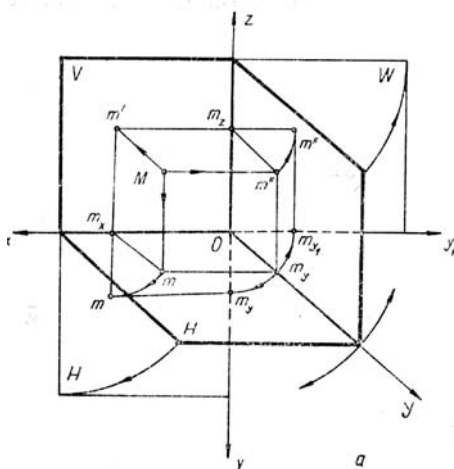


fig.16a

Prin această transformare proiecția orizontală m ajunge pe linia de ordine $m'm_xm$, perpendiculară pe linia de pământ, iar proiecția laterală m'' ajunge pe linia de ordine $m'm_zm''$, perpendiculară pe $\overline{Oz}$.

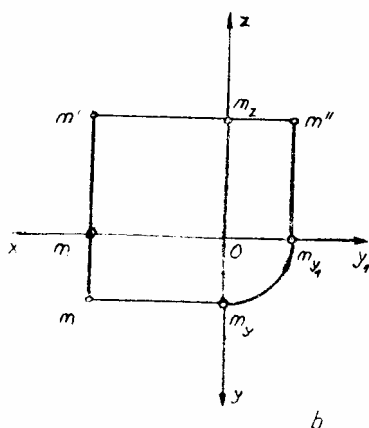


fig. 16 b

Poziția punctului M în spațiu este determinată de segmentele ce măsoară distanțele de la punct la planele reperului și care reprezintă coordonatele punctului.

$Mm''=mm_y=Om_x \rightarrow$ abscisa (x);
 $Mm'=mm_x=Om_y \rightarrow$ ordonata (depărtarea) (y)
 $Mm=m'm_x=Om_z \rightarrow$ cota (z)

Dacă se ia în considerare orientarea axelor atunci coordonatele au următoarele semne, conform tabelului.

Triedru	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Coordonată								
Abscisa	+	+	+	+	-	-	-	-
Ordonata	+	-	-	+	+	-	-	+
Cota	+	+	-	-	+	+	-	-

În epură punctele care au depărtarea negativă au proiecțiile lor orizontale situate deasupra liniei de pământ, iar punctele care au cota negativă, au proiecțiile lor verticale sub linia de pământ. Când abscisa este negativă, proiecțiile verticale și orizontale se află la dreapta axei secundare (yz).

Deoarece rotația planului lateral se face în sens trigonometric, se păstrează acest sens în rotația punctelor m_y , pentru orice poziție ar avea punctul în spațiu.

În continuare sunt prezentate epurele punctului M situat, pe rând în fiecare triedru (fig. 17 ...23)

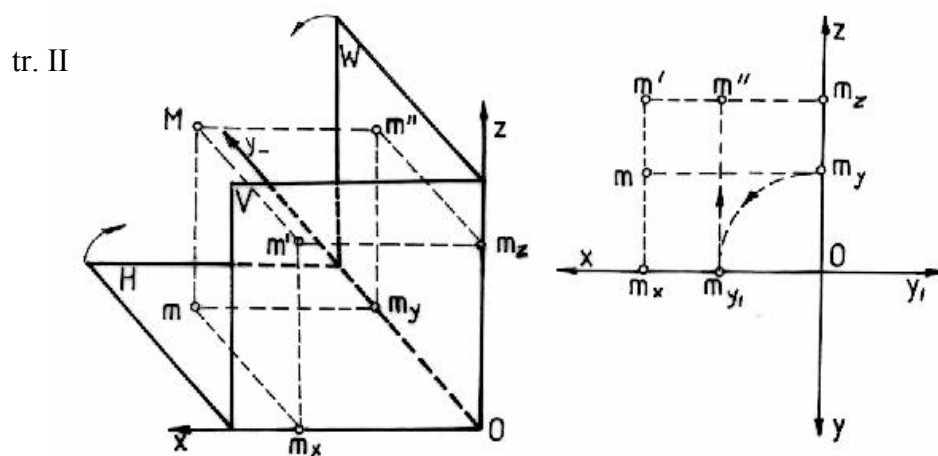


fig.17 a

fig.17 b

tr. III

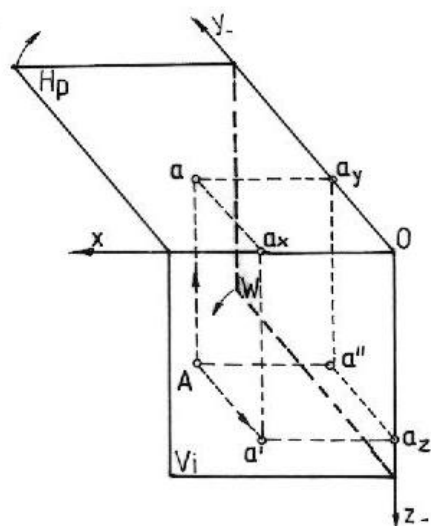


fig.18a

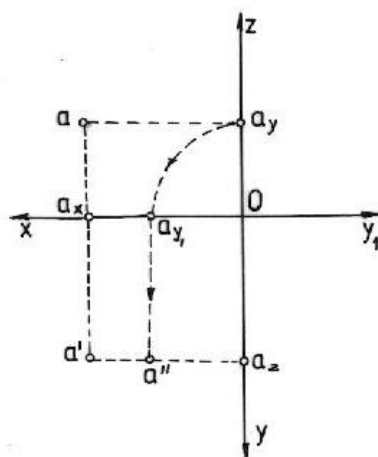


fig.18b

tr. IV

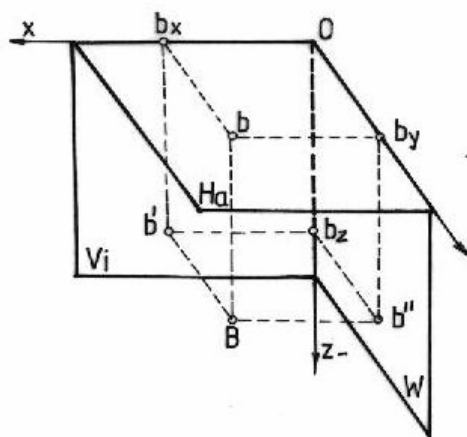


fig. 19a

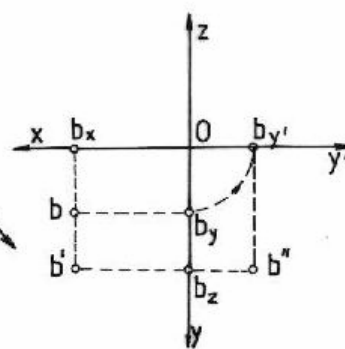


fig.19b

tr. V

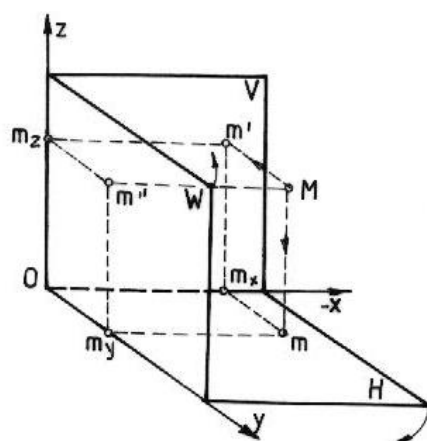


fig.20a

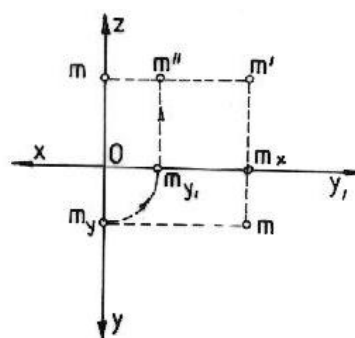


fig.20b

tr. VI

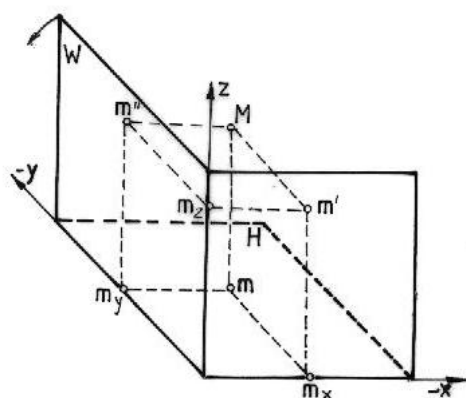


fig.21a

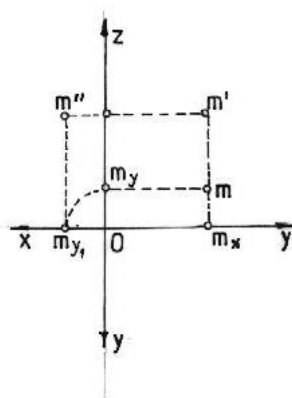


fig.21b

tr. VII

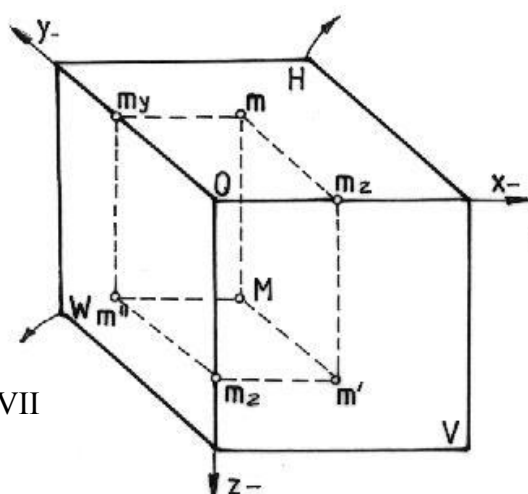


fig.22a

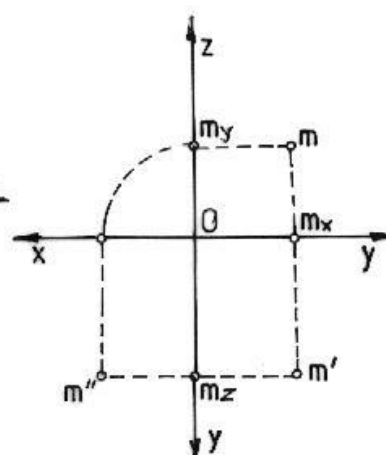


fig.23b

tr. VIII

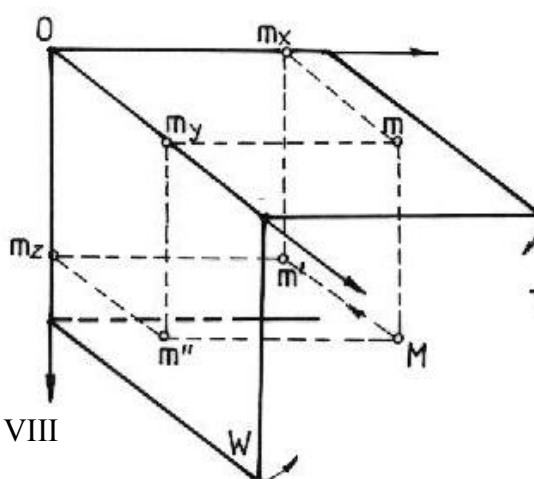


fig.23a

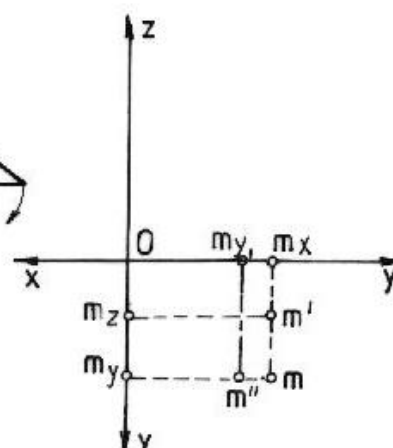


fig.23b

Este suficient să cunoaștem două proiecții ale unui punct, cea de a treia, determinându-se cu ajutorul lor.

Punctele situate în planele de proiecție au una din proiecții confundată cu punctul din spațiu (fig.24).

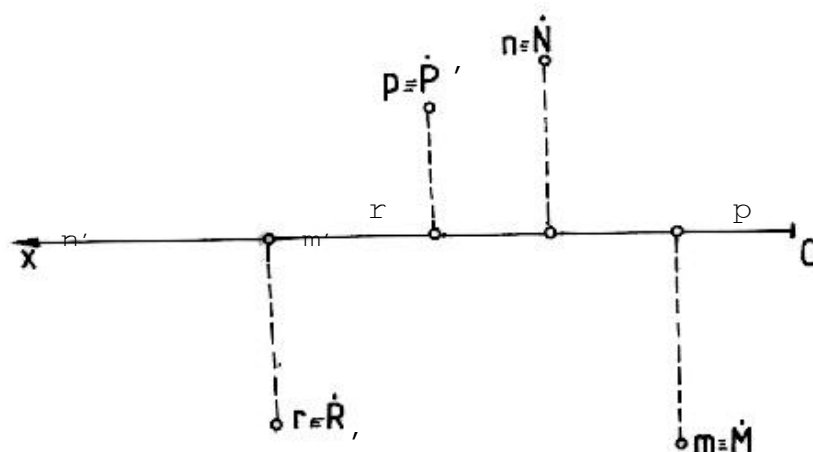


fig.24

$$\dot{M} \in [H_a]$$

$$\dot{N} \in [H_p]$$

$$\dot{P} \in [V_s]$$

$$\dot{R} \in [V_i]$$

1.3 Plane bisectoare

Locul geometric al punctelor egal depărtate de fețele unui diedru este planul bisector al diedrului respectiv.

Pentru reperul format din planele H și V există două plane bisectoare, perpendiculare între ele. Ele împart spațiul în opt unghiuri diedre, numite octanți (fig.25).

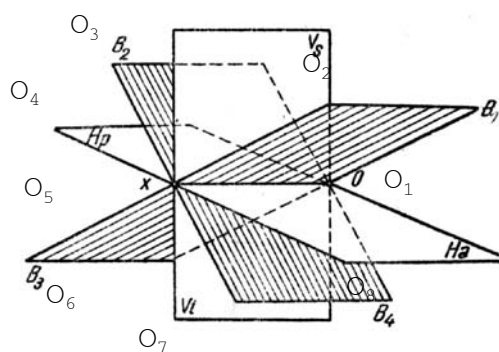


fig.25

Linia de pământ împarte planele bisectoare în două semiplane care se găsesc în diedre opuse.

Astfel planul care bisectează diedrul format de $[H_a]$ și $[V_s]$ bisectează și diedrul III format de $[H_p]$ și $[V_i]$.

Pentru a deosebi diedrul la care se referă planul respectiv, semiplanele bisectoare se notează B_1, B_2, B_3, B_4 . Se înțelege că B_1 și B_3 sunt semiplanele aceluiași plan. Octanții se notează cu $O_1 \dots O_8$ (fig.25).

Prin definiție, punctele din planele bisectoare au cota și depărtarea, egale în valoare absolută.

La reprezentarea în epură, punctele din $[B_1]$ și $[B_3]$ au proiecțiile simetrice în raport cu $\overline{Ox}$, iar punctele din $[B_2]$ și $[B_4]$ au proiecțiile confundate (fig.26).

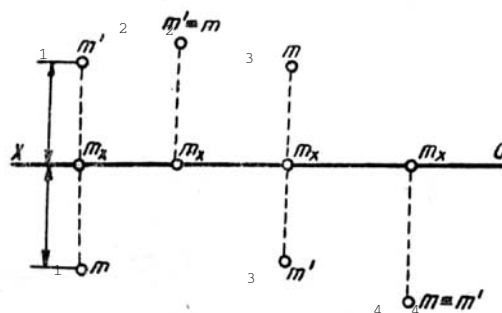


fig.26

$$\dot{M}_1 \in [B_1]$$

$$\dot{M}_2 \in [B_2]$$

$$\dot{M}_3 \in [B_3]$$

$$\dot{M}_4 \in [B_4]$$

1.4 Citirea epurei punctului.

Prin citirea epurei se înțelege recunoașterea poziției punctului din spațiu în raport cu reperul, după proiecțiile sale (fig.27).

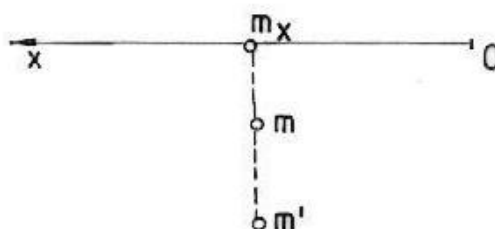


fig. 27

Proiecția orizontală a punctului M se află sub linia de pământ deci se află în $[H_a]$ (depărtarea pozitivă).

Proiecția verticală, m' se află sub linia de pământ deci se află în $[V_i]$ (cota este negativă).

Deoarece $[H_a]$ și $[V_i]$ formează diedrul IV rezultă că $\dot{M} \in IV$. Mai mult decât atât, deoarece cota este mai mare în valoare absolută decât depărtarea $\dot{M}$ se află sub $[B_4]$ deci în octantul 7.

1.5 Punte date prin coordonate numerice

Cunoașterea cotei și depărtării unui punct nu este suficientă pentru a găsi poziția în spațiu a unui punct în raport cu reperul Oxyz. Este necesar să se cunoască distanțele la planele de referință $[H]$, $[V]$, $[W]$. Aceste distanțe sunt: abscisa (x), ordonata (y) și cota (z).

Exemplu:

Fie punctul $M(30,27,19)$ În figura 28a este reprezentat în trei proiecții punctul M.

În figura 28b punctul M este reprezentat în 2 proiecții.

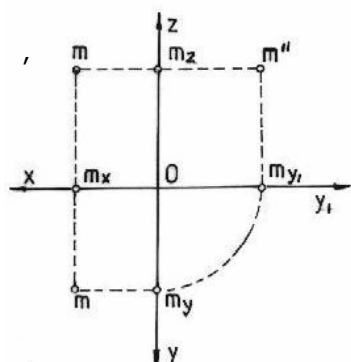


fig.28a

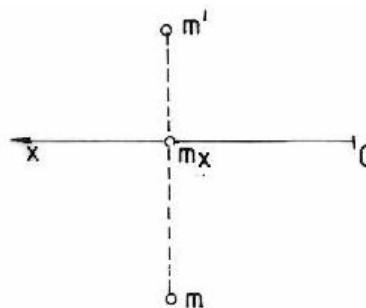


fig.28b

Abscisa fiind pozitivă, se iau la stânga originii 30 mm, care dau poziția punctului m_x . În acest punct se ridică o perpendiculară pe Ox , pe care se măsoară, sub linia de pământ, 27 mm ce reprezintă depărtarea punctului și obținem proiecția orizontală m . Pe aceeași perpendiculară, se măsoară deasupra liniei de pământ 19 mm, ce reprezintă cota și se obține proiecția verticală a punctului $M(30,27,19)$.

Idei de reținut

- Proiecțiile punctelor se notează cu litere mici, punctele din spațiu se notează cu majuscule;
- Proiecțiile orizontală și verticală ale unui punct se găsesc întotdeauna pe aceeași linie de ordine, perpendiculară pe linia de pământ;
- Proiecțiile verticală și laterală ale unui punct se găsesc pe aceeași linie de ordine, paralelă cu linia de pământ;
- Punctele conținute în planul orizontal de proiecție sunt identice cu proiecția lor orizontală, având cota zero;
- Punctele conținute în planul vertical de proiecție sunt identice cu proiecția lor verticală, având depărtarea zero;
- Punctele conținute în planul lateral de proiecție sunt identice cu proiecția lor laterală, având abscisa zero;
- Punctele de pe axe sunt identice cu două dintre proiecțiile lor, cea de a treia proiecție aflându-se în origine;
- Punctele din planele bisectoare II și IV au proiecțiile orizontală și verticală identice;
- Două proiecții ale unui punct determină poziția în spațiu a punctului;
- A citi epura unui punct înseamnă a stabili poziția punctului în raport cu reperul de referință.

Probleme rezolvate

1. Să se construiască reprezentarea plană și în spațiu a punctelor A, B, C, D, având următoarele coordonate: A(7, 17, 25); B(14, -30, 18); C(21, -22, -26); D(28, 26, -12).

Rezolvare

Se consideră axa Ox (linia de pământ) pe care se fixează punctul O ca origine a absciselor, iar sensul pozitiv spre stânga (fig.1.b). Pentru punctul A, se măsoară abscisa de la O spre x, de 7 mm, obținând astfel punctul a_x . Prin punctul a_x se trasează linia de ordine, perpendiculară pe axa Ox. Depărtarea punctului fiind pozitivă, se măsoară 17 mm, sub axa Ox, obținând proiecția orizontală a . Cota fiind pozitivă se măsoară 25 mm deasupra axei Ox, obținând proiecția verticală a' .

Pentru punctul B, se măsoară, pe axa Ox abscisa de 14 mm și se obține punctul b_x . Având depărtarea negativă, se măsoară 30 mm deasupra axei Ox, obținând proiecția orizontală b . Cota punctului fiind pozitivă, se măsoară 18 mm, tot deasupra axei Ox, obținând proiecția verticală b' .

Punctul C are atât depărtarea cât și cota negative. Se măsoară abscisa de 21 mm, obținând punctul c_x . Depărtarea de 22 mm se măsoară deasupra axei Ox, obținând proiecția orizontală c , iar cota de 26 mm se măsoară sub axa Ox, obținând proiecția verticală c' .

Respectând aceste reguli, se construiește și reprezentarea plană a punctului D, obținând proiecțiile d și d' , situate sub axa Ox.

Pentru a intuit poziția punctelor în spațiu, respectiv în care diedre sunt situate, se construiește reprezentarea spațială din figura 1.1.a. Se reprezintă planele de proiecție H și V, din intersecția cărora rezultă axa Ox, pe care se măsoară abscisele, obținând a_x, b_x, c_x și d_x . Din punctul a_x , se trasează o dreaptă paralelă cu axa Oy, pe care se măsoară ordonata (depărtarea) de 17 mm, obținând proiecția orizontală a . Tot din punctul a_x , se trasează o dreaptă paralelă cu axa Oz, pe care se măsoară cota de 25 mm, obținând proiecția verticală a' . Din punctele a și a' , se trasează paralele cu dreptele aa_x și aa'_x , la intersecția lor obținând punctul A, care reprezintă imaginea punctului din spațiu. Asemănător se procedează și cu punctele B, C și cu D. Din această reprezentare, se observă că punctul A este situat în diedrul I, punctul B în diedrul II, punctul C în diedrul III, iar punctul D în diedrul IV.

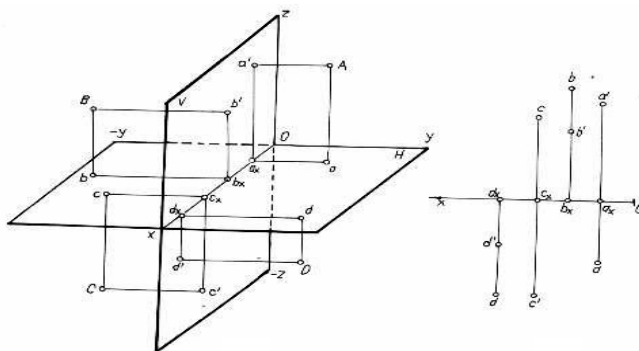


fig.1.a, b

2. Să se construiască reprezentarea plană și în spațiu a punctelor A, B, C și D, conținute în planele bisectoare ale celor patru diedre (fig. 2, a, b)

Rezolvare

Un punct care aparține unui plan bisector, are depărtarea egală cu cota în valoare absolută. Punctul A este conținut de planul bisector al diedrului I, deci are depărtarea egală cu cota, ambele pozitive, iar proiecțiile a și a' sunt simetrice față de axa Ox (fig. 2, b). Punctul B, conținut de planul bisector al diedrului II, $B \in [B_2]$, are depărtarea negativă egală cu cota pozitivă, deci proiecțiile b și b' vor fi confundate și situate deasupra axei Ox. Punctul $C \in [B_3]$, are cota egală cu depărtarea, ambele negative, iar proiecțiile în reprezentarea plană vor fi simetrice față de axa Ox. Punctul $D \in [B_4]$, are cota negativă, egală cu depărtarea pozitivă, iar proiecțiile d și d' sunt confundate și situate sub axa Ox.

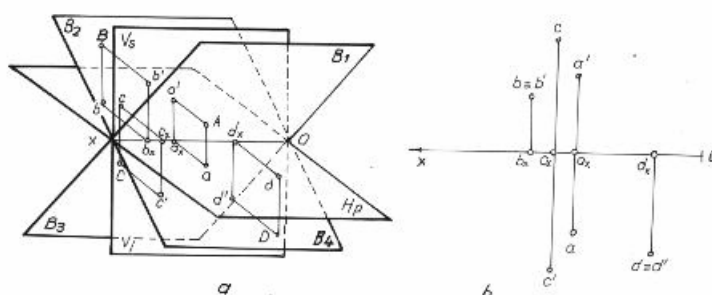


fig. 2

Probleme propuse spre rezolvare

3. Să se construiască epura punctelor: $\dot{A}(120, 40, 40)$; $\dot{B}(100, 60, -20)$; $\dot{C}(80, -50, -50)$; $\dot{D}(60, 70, 30)$; $\dot{I}(40, -75, 75)$.
- Se cere să se precizeze poziția în spațiu a acestora.

4. Să se reprezinte în epură punctele: $\dot{M} \in [V]$ triedrul VII; $\dot{N} \in \overline{Oy_-}$; $\dot{P} \in [H]$ triedrul III; $\dot{Q} \in \overline{Ox_-}$.

5. Se dă punctul $A(10, 30, 40)$. Se cere construcția epurelor punctelor: $\dot{B}$ - simetricul punctului A, față de planul orizontal $[H]$; $\dot{C}$ - simetricul punctului A față de planul vertical $[V]$; $\dot{D}$ - simetricul punctului A față de $[W]$; $\dot{E}$ - simetricul punctului A față de planul bisector $[B_1]$.

6. Se dau punctele: $\dot{A}(30, 35, 55)$; $\dot{B}(50, -45, -65)$; $\dot{C}(70, 65, 85)$; $\dot{D}(100, -45, 75)$; $\dot{E}(120, 25, 45)$. Se cere să se construiască epura acestor puncte, precum și punctele:

$\dot{A}_1$ - simetricul lui $\dot{A}$ față de $[V]$;

$\dot{B}_1$ - simetricul lui $\dot{B}$ față de $[H]$;

$\dot{C}_1$ - situat în bisectorul I și având aceeași proiectantă cu a punctului C față de $[H]$;

$\dot{C}_2$ - situat în bisectorul II având aceeași proiectantă cu a punctului C față de $[V]$;

$\dot{D}_1$ - situat în bisectorul III și având aceeași proiectantă cu a punctului D față de $[H]$;

$\dot{E}_1$ respectiv $\dot{E}_2$ - simetricele punctului E față de bisectorul I, respectiv bisectorul II.

7. Fie punctele $A(25, 0, 0)$ și $B(25, +45, -45)$. Să se construiască epura punctului C, simetricul punctului A față de $\dot{B}$.

Cap 2. Dreapta.

Dreptele din spațiu, raportate la un sistem de referință, dublu sau triplu ortogonal, se reprezintă în epură (două sau trei proiecții) cu ajutorul proiecțiilor punctelor ce le determină. Ele înțepă planele de proiecție în puncte numite urmele drepte pe planele de proiecție, notate cu H, V, W. Ocupând poziții particulare față de planele de proiecție, dreptele sunt definite, numite și reprezentate în acest capitol, determinându-li-se și punctele de intersecție cu planele de proiecție și cu planele bisectoare. Pozițiile relative a două drepte din spațiu, de paralelism, de concurență, de disjuncție, sunt recunoscute după poziția proiecțiilor dreptelor reprezentate în aceeași epură.

• Obiective

- Să reprezinte în epură, în două și trei proiecții, o dreaptă dată prin coordonatele a două din punctele sale;
- Să determine urmele drepte pe planul orizontal de proiecție, pe planul vertical de proiecție, pe planul lateral de proiecție;
- Să reprezinte, în epură, dreptele paralele cu planele de proiecție;
- Să reprezinte, în epură, dreptele perpendiculare pe planele de proiecție;
- Să reprezinte epura unui punct aparținând unei drepte;
- Să construiască epura punctelor de intersecție ale unei drepte cu planele bisectoare;
- Să stabilească diedrele și octanții pe care îi străbate o dreaptă;
- Să construiască epura a două drepte concurente;
- Să construiască epura a două drepte disjuncte.

2.1 Reprezentarea dreptei

Dreapta din spațiu este reprezentată prin proiecțiile ei ortogonale pe planele de proiecție.

Proiecțiile unei drepte D se determină proiectând două puncte A și B cu $\dot{A} \in \overline{D}$ și $\dot{B} \in \overline{D}$, pe planele de proiecție și unind proiecțiile de același nume. Proiecțiile dreptei vor fi: ab - proiecția orizontală; $a'b'$ - proiecția verticală; $a''b''$ - proiecția laterală (fig. 29).

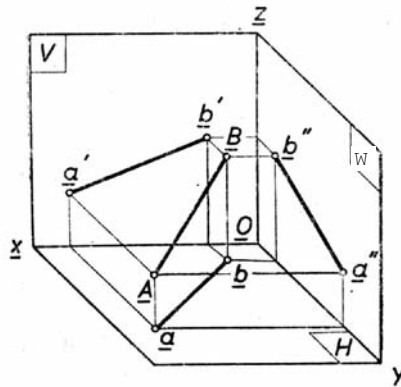


Fig. 29

Proiecția unei drepte pe un plan de proiecție poate fi considerată ca fiind intersecția planului proiectant al dreptei cu planul de proiecție (fig. 30).

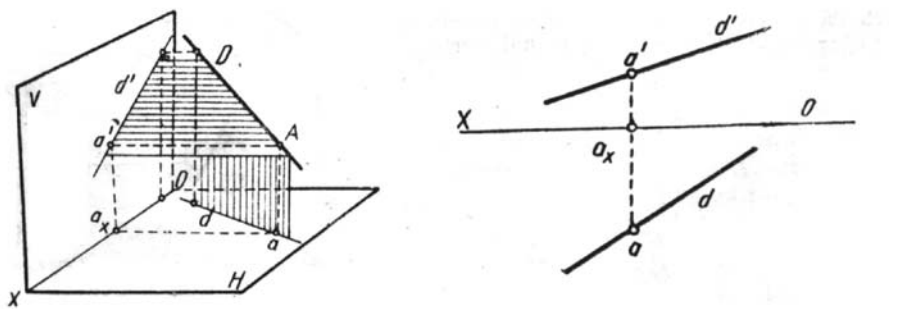


Fig. 30

Dacă se cunosc două proiecții ale unei drepte D , d și d' , poziția în spațiu a dreptei este complet determinată.

Un punct $A(a, a')$ ce aparține dreptei are proiecțiile de același nume ale dreptei. Dacă se cunosc proiecțiile a două puncte date A și B se obțin proiecțiile dreptei AB , unind proiecțiile de același nume ale proiecțiilor date (fig. 31).

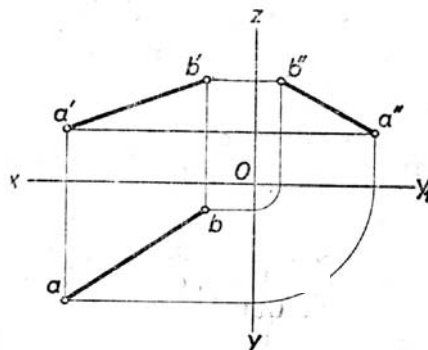


Fig. 31

2.2 Urmele drepte. Determinarea urmelor.

Se numește urma dreptei pe un plan, punctul în care dreapta intersectează acel plan (înțepă planul) (fig. 32a).

Corespunzător planelor reperului triortogonal, urmele dreptei vor fi: urma orizontală $\dot{H}(h, h', h'')$; urma verticală $\dot{V}(v, v', v'')$; urma laterală $\dot{W}(w, w', w'')$.

De reținut că urmele fiind puncte din planele de proiecție sunt confundate cu una din proiecțiile lor: $\dot{H} \equiv h$; $\dot{V} \equiv v$; $\dot{W} \equiv w$. Celelalte proiecții ale urmelor se află pe axele de coordonate. Cunoscând că urmele sunt puncte din plan și în același timp aparțin dreptei se stabilește un mod de construire a urmelor.

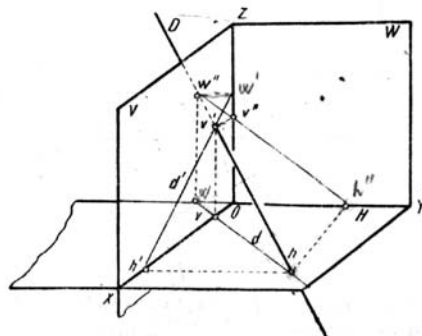


Fig. 32a

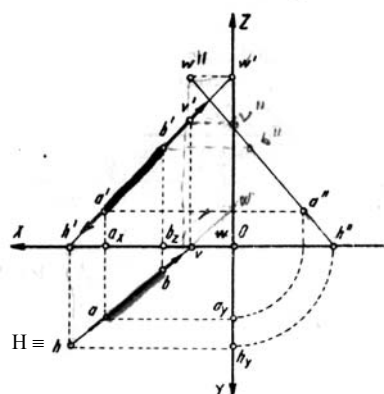


Fig. 32b

Urma orizontală – se prelungește proiecția verticală a dreptei până intersectează linia de pământ, punct ce se notează cu h' din care se duce linia de ordine până intersectează pe ab în h ($h \equiv \dot{H}$), proiecția orizontală a urmei orizontale. Proiecția acestui punct pe $[W]$ este h'' situată la intersecția axei Oy cu proiecția laterală a dreptei.

Urma verticală – se prelungește proiecția orizontală ab a dreptei până intersectează axa Ox . Punctul acesta se notează cu v și este proiecția orizontală a urmei verticale. De aici se duce linie de ordine, perpendiculară pe $\overline{Ox}$, până intersectează proiecția verticală a dreptei, obținându-se punctul $v' \equiv \dot{V}$ - urma verticală a dreptei. Proiecția laterală a lui $\dot{V}$ este v'' situat pe $\overline{Oz}$ și pe proiecția laterală a dreptei.

Urma laterală – se prelungește proiecția verticală $a'b'$ până intersectează axa Oz , obținându-se proiecția verticală a urmei laterale, notată cu w' . Din acest punct se duce linie de ordine perpendiculară pe $\overline{Oz}$ până se întâlnește proiecția laterală $a''b''$. Se obține punctul $w'' \equiv \dot{W}$.

2.3 Pozițiile particulare ale dreptei.

O dreaptă poate fi paralelă cu un plan de proiecție, perpendiculară pe un plan de proiecție, concurentă cu axa Ox sau conținută într-un plan de proiecție.

Drepte paralele cu planele de proiecție.

a. Orizontala (dreapta de nivel), este dreapta paralelă cu planul orizontal de proiecție (fig. 33a). Punctele acestei drepte au cota constantă. Planul proiectant al dreptei față de $[V]$ este paralel cu $[H]$ și ca atare proiecția verticală a dreptei ($c'd'$) este paralelă cu $\overline{Ox}$. Proiecția orizontală cd apare în mărime adevărată ca fiind proiecția pe un plan paralel cu dreapta, deci $cd=CD$ și în general poate lua orice poziție.

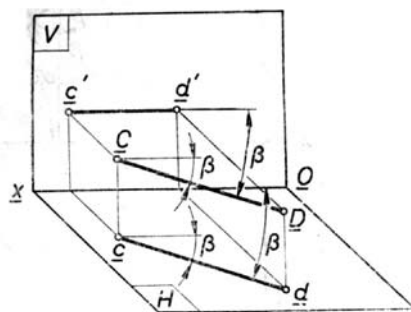


Fig. 33a

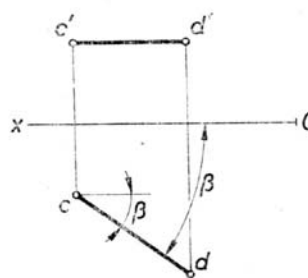


Fig. 33b

Mărimea unghiului pe care îl face dreapta cu planul vertical de proiecție V este unghiul β dintre dreaptă și proiecția verticală a acesteia. Laturile fiind paralele cu planul orizontal, unghiul apare în adevărată mărime și în planul orizontal de proiecție (fig.33,a).

Pe epură (fig. 33b), proiecția verticală $c'd'$ este paralelă cu axa Ox , iar proiecția orizontală poate lua orice poziție.

Unghiul dintre cd și axa Ox apare nedeformat și este unghiul β pe care-l face orizontale cu planul vertical de proiecție.

Proiecția orizontală cd este în adevărată mărime, $cd=CD$.

În figura 33c este reprezentată o dreaptă oarecare D de proiecții d și d' cu urma ei verticală $V(v, v')$. Urma ei orizontală este la infinit.

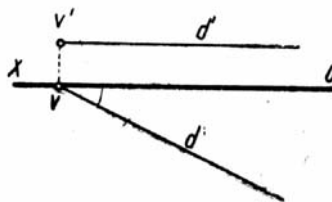


Fig. 33c

b. Frontala. Fie frontala EF , adică dreapta paralelă cu planul vertical de proiecție V (fig. 34a). Planul proiectant al dreptei față de planul orizontal fiind paralel cu planul vertical de proiecție V , rezultă că, proiecția orizontală ef va fi paralelă cu axa Ox . Proiecția verticală $e'f'$ poate lua orice poziție.

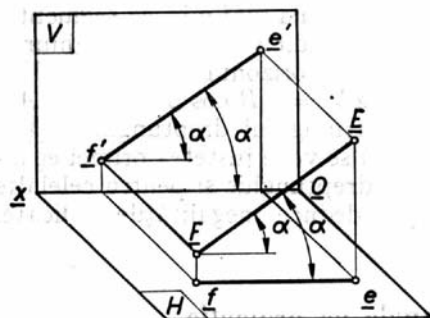


Fig. 34a

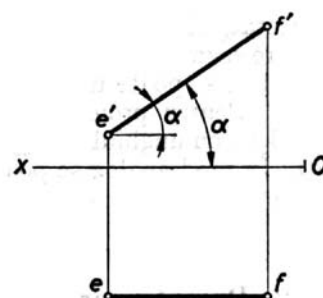


Fig. 34b

Pe epură (figura 34b) proiecția orizontală ef , este paralelă cu axa Ox , și proiecția verticală înclinată față de axa Ox , cu care formează unghiul α , pe care frontala îl face cu planul orizontal de proiecție și segmentul proiecției $e'f'$ are mărime egală cu segmentul din spațiu adică $e'f' = EF$. Urma verticală a frontalei se află la infinit.

c. Dreapta de profil. Fie dreapta de profil GI , adică dreapta paralelă cu planul lateral de proiecție (fig. 35a). În cazul acestei drepte este necesar să se introducă și al treilea plan de proiecție (W), deci de reprezentat în triedrul dreapta. Pe figura 35a se vede că planul proiectant al dreptei, față de planul orizontal H și față de planul vertical V , este identic și paralel cu planul de proiecție W . Deci rezultă că proiecțiile orizontală gi și verticală $g'i'$ sunt perpendiculare pe axa Ox . În ce privește proiecția laterală $g''i''$ ea poate lua orice poziție.

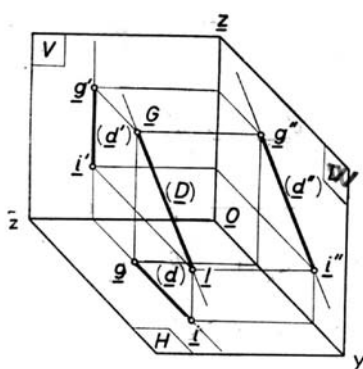


Fig. 35a

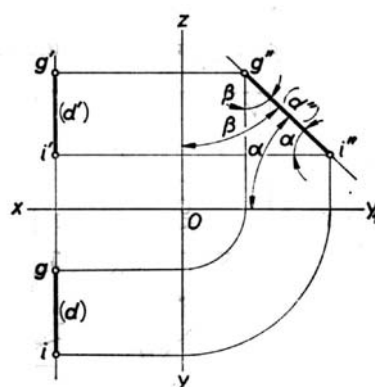


Fig. 35b

Pe epura din figura 35b, se văd proiecțiile orizontală gi și verticală $g'i'$, perpendiculare pe linia de pământ, deci pe aceeași linie de ordine. Proiecția laterală $g''i''$ are o poziție oarecare și formează cu axa principală de proiecție unghiul α pe care dreapta îl face cu planul orizontal de proiecție H și cu axa secundară de proiecție, unghiul β pe care dreapta îl face cu planul vertical de proiecție V și are mărimea egală cu segmentul din spațiu, adică $g''i'' = GI$.

Drepte perpendiculare pe planele de proiecție

a. Verticala. Fie dreapta verticală EF (perpendiculară pe [H]), redată în figura 36 a. Deoarece toate punctele dreptei au aceeași abscisă și aceeași depărtare, și cele două proiecții $e'f'$ și $e''f''$ sunt paralele c

b. u axa Ox. Poziția dreptei coincidând cu direcția de proiectare față de planul orizontal de proiecție, proiecția dreptei pe acest plan va fi complet deformată în $e \equiv f$.

La epura dreptei verticale (fig. 36b), proiecțiile verticală $e'f'$ și laterală $e''f''$ sunt paralele cu axa secundară de proiecție ($\overline{Oz}$), iar proiecția orizontală apare complet deformată în $e \equiv f$.

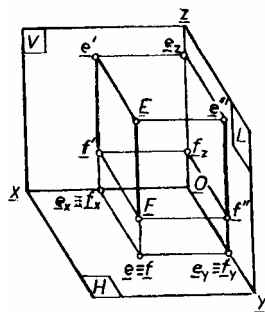


Fig. 36a

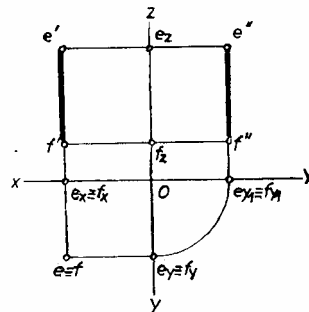


Fig. 36b

c. Dreapta de capăt. Fie dreapta CD perpendiculară pe [V] (paralelă cu planele de proiecție H și W), redată în figura 37a. În acest caz, toate punctele dreptei vor avea aceeași abscisă și aceeași cotă. Rezultă că cele două proiecții cd și $c'd'$ sunt paralele cu axa Oy și cum această axă este perpendiculară pe planul V, înseamnă că și CD este perpendiculară pe planul V și ca atare, are ca proiecție pe acest plan punctul $c' \equiv d'$.

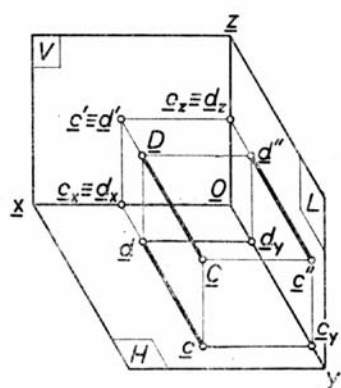


Fig. 37a

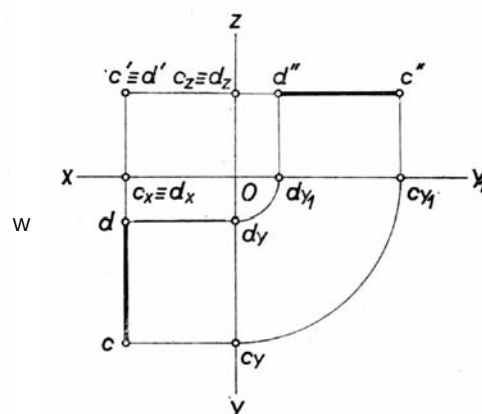


Fig. 37b

În epura dreptei de capăt (fig. 37b), proiecția orizontală $\overline{cd}$ este paralelă cu axa secundară de proiecție ($\overline{Oy}$), iar proiecția laterală $c''d''$ este paralelă cu axa principală ($\overline{Ox}$), proiecția verticală apărând complet deformată $c' \equiv d'$.

d. Fronto-orizontala. Fie dreapta AB paralel cu planele vertical și orizontal de proiecție, deci paralelă cu axa Ox , redată în figura 38a prin $\overline{AB}$. Deci toate punctele dreptei vor avea aceeași depărtare și aceeași cotă, de unde și cele două proiecții ab și $a'b'$ vor fi paralele cu $\overline{AB}$, paralele deci și cu axa Ox , și cum axa Ox este perpendiculară pe planul lateral de proiecție W înseamnă că și $\overline{AB}$ este perpendiculară pe $[W]$ și ca atare are ca proiecție pe acest plan punctul $a'' \equiv b''$. Pentru o mai ușoară citire a epurei se convine ca, atunci când mai multe puncte din spațiu se proiectează pe planele de proiecție în același punct, să se scrie mai întâi punctul cel mai apropiat de observator și apoi, în ordine celelalte.

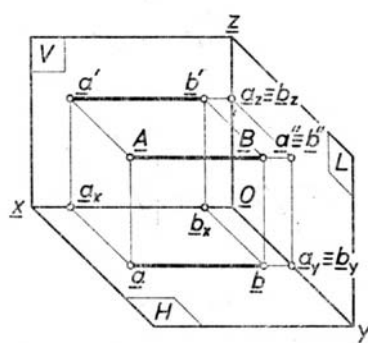


Fig. 38a

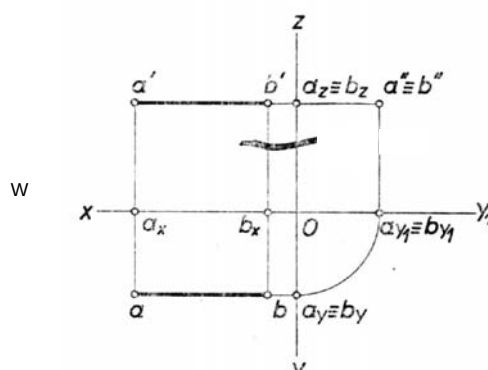


Fig. 38b

Epura fronto-orizontalei este arătată în fig. 38 b; proiecțiile orizontală ab și verticală $a'b'$ sunt paralele cu axa principală de proiecție, iar proiecția laterală apare complet deformată în $a'' \equiv b''$.

Dreapta concurentă cu axa Ox

Are proiecțiile d și d' concurente în același punct pe axa Ox , care corespunde cu urmele dreptei (fig. 39).

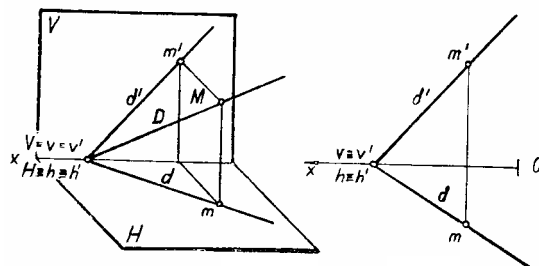


Fig. 39

Drepte conținute în planele de proiecție

Cazul particular al dreptelor paralele cu planele de proiecție îl constituie dreptele cuprinse în aceste plane. Caracteristic este faptul că proiecția pe planul în care se găsește dreapta are orice poziție și că punctele luate pe dreaptă au proiecțiile pe acest plan de proiecție identice cu ele însăși, așa cum se vede pe epurele date în fig. 40a, b, c, respectiv, segmentul de dreaptă MN cuprins în planul orizontal de proiecție, segmentul de dreaptă PR cuprins în planul vertical de proiecție și segmentul de dreaptă ST cuprins în planul lateral de proiecție. Celelalte proiecții sunt situate întotdeauna pe axele de proiecție așa cum se vede pe figurile respective. Dacă se urmăresc și punctele ajutătoare, se observă că aceste puncte corespunzătoare axei, care este perpendiculară pe planul de proiecție pe care se află dreapta, sunt identice cu originea O .

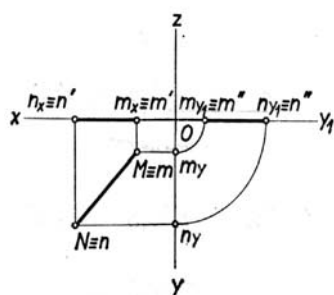


Fig. 40a

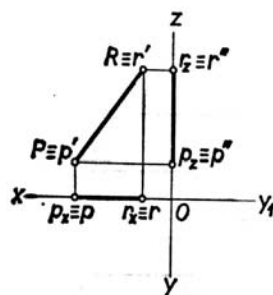


Fig. 40b

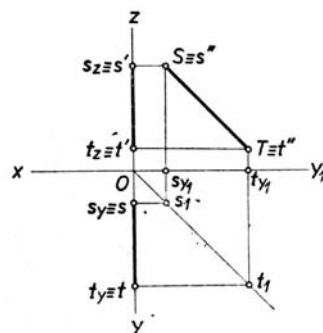


Fig. 40c

Iar celelalte puncte ajutătoare sunt identice cu proiecțiile corespunzătoare de pe axe. Pe figuri s-au notat punctele ajutătoare

corespunzătoare a două axe; pentru a treia axă nu sunt notate, acestea fiind însă identice cu originea O.

2.4 Intersecția unei drepte cu planele bisectoare

Fie o dreaptă D de proiecții $-d-$, $-d'-$. Punctul de intersecție al dreptei D cu $[B_1]$ este un punct M care aparține dreptei și în același timp are cota și depărtarea egale în valoare absolută (proiecțiile lui sunt simetrice în raport cu Ox) (fig. 41).

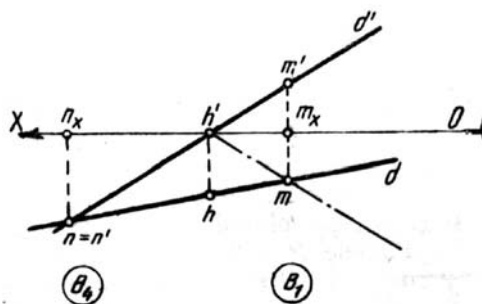


Fig 41

Proiecția orizontală $-m-$ a lui M se afla la intersecția simetricei față de Ox a proiecției $-d'-$ cu proiecția orizontală $-d-$.

Astfel este satisfăcută egalitatea $mm_x = m'_xm'_x$.

Punctul N de intersecție dintre dreapta D și bisectorul B2 sau B4 are proiecțiile confundate $n \equiv n'$. Ținând cont că acest punct aparține dreptei și deci proiecțiile lui se află pe proiecțiile de același nume ale dreptei, atunci $-n-$ și $-n'-$ se vor găsi la intersecția proiecțiilor dreptei.

2.5 Împărțirea unei drepte în regiuni

O dreaptă străbate unul, două sau trei diedre funcție de poziția ei față de planele reperului. Determinarea porțiunilor de dreaptă ce sunt cuprinse în fiecare diedre pe care îl străbate constituie împărțirea dreptei în regiuni.

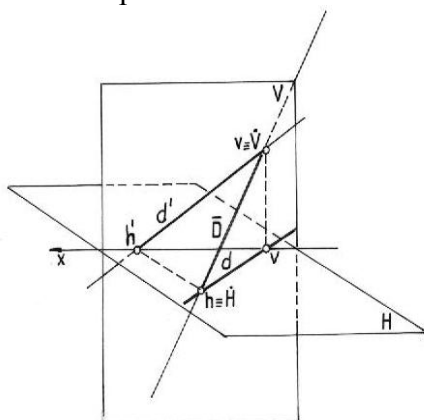


Fig. 42a

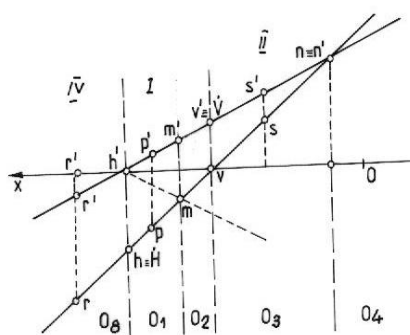


Fig. 42b

Pentru a găsi porțiunile cuprinse în fiecare diedru pe care îl străbate, mai întâi, se determină urmele dreptei $\dot{H}(h, h')$ și $V(v, v')$ și se prelungesc proiecțiile dreptei dincolo de urme. Se ia pe dreaptă un punct $R(r, r')$ la stânga lui $\dot{H}$ și se observă că are depărtarea pozitivă și cota negativă deci porțiunea aceasta de dreaptă este situată în diedrul IV. Se ia apoi punctul $P(p, p')$ între urme și se constată că depărtarea este pozitivă, cota este pozitivă, rezultă ca porțiunea de dreaptă cuprinsă între urme este în diedrul I. La dreapta urmei verticale se ia un punct $S(s, s')$ și se observă că depărtarea este negativă iar cota este pozitivă deci se află în diedrul II.

Pentru a stabili octanții pe care îi străbate dreapta, se găsesc punctele în care dreapta înțeapă planele bisectoare, $M(m, m')$ și $N(n, n')$ (fig. 42).

Dreapta $\bar{D}$ străbate octanții: O_8, O_1, O_2, O_3 și O_4 .

2.6. Pozițiile relative a două drepte

Două drepte pot fi între ele paralele, concurente, disjuncte (cuprinse în plane diferite) sau confundate.

Drepte paralele

Proiecțiile de același nume a două drepte paralele sunt paralele.

Fie dreptele D și D_1 paralele, conținute în planele paralele P și P_1 perpendiculare pe planul H . (fig. 43a). Planele P și P_1 intersectează planul H după două drepte paralele.

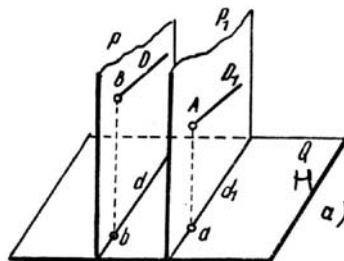


Fig 43a

Aceste drepte $-d-$ și $-d_1-$ sunt proiecțiile dreptelor D și D_1 . Proiectând dreptele pe planele V și W , proiecțiile lor pe un același plan vor fi paralele (fig. 44).

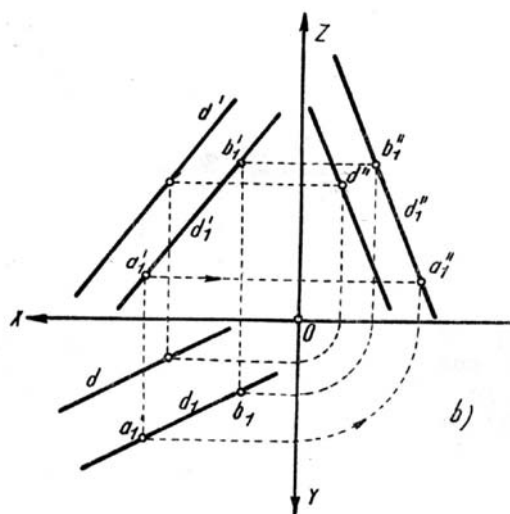


Fig. 44

Drepte concurente

Două drepte oarecare sunt concurente dacă proiecțiile lor de același nume sunt concurente, iar punctele lor de concurență se găsesc pe aceeași linie de ordine (fig. 44).

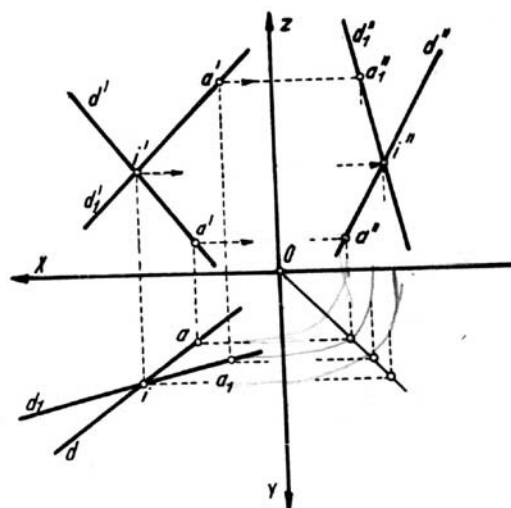


Fig. 45

Drepte oarecare sau disjuncte (cuprinse in plane diferite)

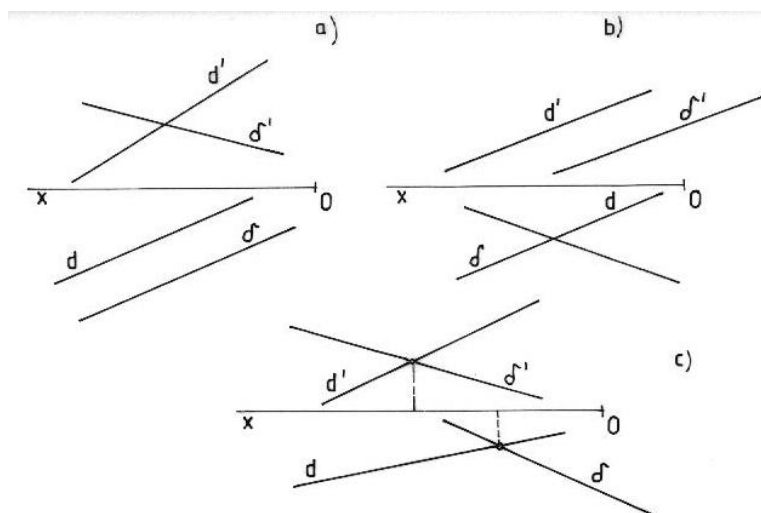


Fig. 46

Două drepte oarecare nu determină și nu pot fi conținute de un plan. În figura 46 sunt prezentate trei cazuri ce drepte D și D_1 situate în plane diferite (proiecțiile verticale concurente și cele orizontale paralele sau proiecțiile verticale concurente și proiecțiile orizontale concurente dar punctele lor de intersecție nu se află pe aceeași linie de ordine).

Proiecțiile unghiului drept

Un unghi drept se proiectează tot ca un unghi drept, dacă cel puțin o latură este paralelă cu planul pe care se proiectează (fig. 47).

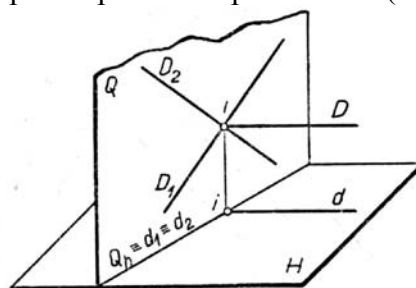


Fig. 47

Fie o dreaptă D , paralelă cu planul H și perpendiculară pe o dreaptă D_1 , conținută într-un plan $Q \perp [H]$.

Dreapta D este perpendiculară și pe planul Q .

Planul Q fiind proiectant față de $[H]$ pentru dreapta D_1 , proiecția d_1 va fi confundată cu Q_h , dreapta de intersecție a planelor Q și H .

Dreapta D fiind perpendiculară pe planul Q , va fi perpendiculară și pe $d_1 \equiv Q_h$ deci cele două proiecții d și d_1 vor fi perpendiculare.

Proiecțiile unghiului drept se utilizează pentru reprezentarea dreptelor perpendiculare și determinarea distanțelor.

Se observă că dacă se consideră o altă dreaptă D_2 conținută de planul Q , aceasta va avea proiecția d_2 pe planul H , confundată cu Q_h , deci proiecția $-d-$ va fi perpendiculară și pe proiecția d_2 .

• Idei de reținut

- Proiecțiile drepte date prin două puncte se obțin unind proiecțiile de același nume ale punctelor date;

- Urmele drepte pe planele de proiecție sunt punctele în care dreapta înțeapă planele de proiecție și se notează cu $H(h, h', h'')$, $V(v, v', v'')$, $W(w, w', w'')$;

- Condiția ca un punct să aparțină unei drepte este ca proiecțiile lui să se găsească pe proiecțiile de aceleași nume ale drepte;

- Dreptele paralele cu unul din planele de proiecție nu au urmă pe acel plan;

- Dreptele perpendiculare pe un plan de proiecție au o singură urmă și aceea este identică cu proiecția dreptelor (care este un punct) pe planul pe care acestea sunt perpendiculare;

- Dreptele paralele au, la reprezentarea în epură, proiecțiile de același nume, paralele;

- Dreptele concurente în spațiu au, la reprezentarea în epură, proiecțiile de aceleași nume concurente și punctele lor de intersecție, pe aceeași linie de ordine, perpendiculară pe linia de pământ (în sistemul de proiecție dublu ortogonal).

• Probleme rezolvate

1. Fiind date punctele $\dot{A}(10, 8, 24)$ și $\dot{B}(36, 18, 10)$ să se construiască reprezentarea spațială și plană a dreptei AB .

Rezolvare

Se reprezintă cele două plane de proiecție H și V (fig. 1, a). Se măsoară coordonatele punctului A , determinând proiecția orizontală a , proiecția verticală a' și imaginea $\dot{A}$ a punctului din spațiu. Se construiește în mod asemănător reprezentarea punctului B . Prin unirea proiecțiilor orizontale ale celor două puncte a și b , se obține proiecția orizontală a dreptei, prin unirea proiecțiilor verticale a' și b' , se obține proiecția verticală a dreptei, iar prin unirea celor două puncte A și B , se obține imaginea dreptei din spațiu.

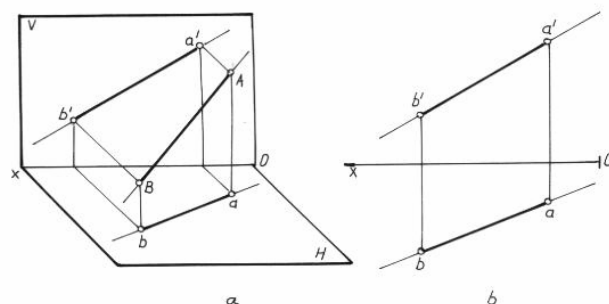


Fig. 1

Pentru reprezentarea plană (fig. 1a), se consideră axa Ox , pe care se măsoară, de la $\hat{O}$ spre, abscisa punctului A de 10 mm și a punctului B de 36 mm. Prin aceste puncte se trasează liniile de ordine perpendiculare pe axa Ox , pe care se măsoară depărtările sub axa Ox și cotele deasupra axei Ox , determinând proiecțiile orizontale a și b și proiecțiile verticale a' și b' .

Prin unirea proiecțiilor de același nume ale punctelor, se obțin proiecțiile dreptei.

35. Să se reprezinte în epură dreapta $D(d, d', d'')$, definită prin punctele A și B . Să se determine urmele dreptei, punctele de intersecție cu planele bisectoare și diedrele pe care le străbate această dreaptă. dreapta D este dată prin punctele: $\hat{A}(70, 40, 50)$ și $\hat{B}(20, -20, -10)$, (fig. 2).

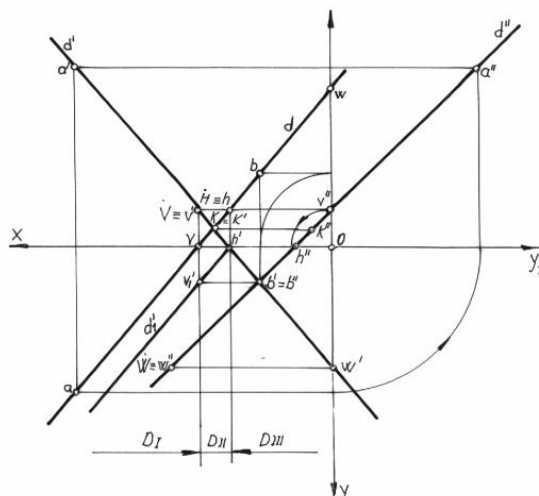


Fig. 2

Rezolvare

În figura 2 se construiesc proiecțiile punctelor $\dot{A}(a, a', a'')$ și $\dot{B}(b, b', b'')$ cu ajutorul coordonatelor date:

- se unesc proiecțiile de același nume ale punctelor, obținându-se proiecțiile dreptei: $a \cup b \Rightarrow d$, $a' \cup b' \Rightarrow d'$ și $a'' \cup b'' \Rightarrow d''$;

- se prelungește proiecția verticală a dreptei până intersectează axa Ox și se obține proiecția verticală a urmei orizontale, $h' = d' \cap \overline{Ox}$, din h' se duce linie de ordine până se intersectează proiecția orizontală a dreptei (d) și se obține proiecția orizontală a urmei orizontale $h \equiv \dot{H}$;

- se prelungește proiecția orizontală a dreptei până intersectează axa Ox și se obține proiecția orizontală a urmei verticale $v \equiv d \cap \overline{Ox}$, din v se duce linie de ordine până intersectează proiecția verticală a dreptei (d') și se obține proiecția verticală a urmei verticale $v' \equiv \dot{V}$;

- se prelungește proiecția verticală a dreptei până intersectează axa Oz și se obține proiecția verticală a urmei laterale $w' \equiv d' \cap \overline{Oz}$;

- se prelungește proiecția orizontală a dreptei până intersectează axa Oy și se obține proiecția orizontală a urmei laterale $w \equiv d \cap \overline{Oy}$;

- din w' se duce linie de ordine până intersectează proiecția laterală a dreptei (d'') și se obține proiecția laterală a urmei laterale $w'' \equiv \dot{W}$;

- se determină punctele de intersecție cu planele bisectoare: $d \cap d'$ implică $(k, k') \equiv \overline{D} \cap [B_2]$; simetrica proiecției verticale a dreptei D , d_l' , față de axa $\overline{Ox}$ nu intersectează proiecția orizontală $d(d // d')$, implică $\overline{D} // [B_1]$;

- diedrele pe care le străbate dreapta sunt indicate în figura 2.2.

Probleme propuse spre rezolvare

3. Să se construiască proiecțiile dreptei AB și să se determine urmele dreptei pe cele trei plane de proiecție :

- $\dot{A}(5, -10, 25)$, $\dot{B}(40, 25, 5)$;
- $\dot{A}(10, 15, 30)$, $\dot{B}(45, -10, 35)$;
- $\dot{A}(12, -32, 7)$, $\dot{B}(47, -6, -27)$;
- $\dot{A}(10, 28, 10)$, $\dot{B}(50, 5, -25)$.

4. Să se reprezinte în epură dreptele AB și CD și să se construiască urmele lor pe trei plane de proiecție. Dreptele sunt date prin: $\dot{A}(-20, 20, 10)$; $\dot{B}(30, 50, 30)$; $\dot{C}(10, 10, 40)$; $\dot{D}(0, 20, 30)$.

5. Se dă dreapta AB cu $\dot{A}(90, -20, -35)$ și $\dot{B}(60, -35, 40)$. Prin $\dot{M}(30, 20, -40)$ să se ducă o dreaptă concurentă cu dreapta AB, în punctul de intersecție al acesteia cu $[B_2]$.

6. Se dă dreapta AB cu $\dot{A}(80, 0, 20)$ și $\dot{B}(40, 0, 50)$. Prin punctul $M(60, 0, -30)$ să se ducă o dreaptă Δ , concurentă cu $\overline{AB}$.

7. Să se precizeze poziția în spațiu a dreptelor : $\overline{AB}$ cu $\dot{A}(60, 40, 10)$, $\dot{B}(30, 20, 50)$ și $\overline{CD}$ cu $\dot{C}(60, 40, -20)$, $\dot{D}(30, 20, 30)$.

Cap 3. Planul

- Planul determinat de trei puncte necoliniare, dreaptă și punct exterior ei sau două drepte paralele este reprezentat în geometria descriptivă, prin urmele planului pe planele de proiecție și în situații deosebite, prin proiecțiile elementelor ce-l definesc. Urmele planului sunt drepte de intersecție ale planului cu planele sistemului de proiecție, poziția lor în epură dând informații despre natura planului. O dreaptă conținută într-un plan dat prin urme are urmele pe urmele de același nume ale planului. Un punct dintr-un plan, la reprezentarea în epură, are proiecțiile pe proiecțiile de același nume ale unei drepte din plan. Planele ocupând poziții particulare față de planele de proiecție ale sistemului, pot fi paralele cu planele de proiecție sau perpendiculare pe acestea. Relația reciprocă a două plane poate fi de concurență sau de paralelism. Planul poate exista în relație și cu o dreaptă, aceasta putând fi conținută în plan, paralelă cu planul sau concurentă cu planul. Dreapta perpendiculară pe un plan are proiecțiile perpendiculare pe urmele de același nume ale planului, problema care se pune fiind aceea de determinare a piciorului perpendicularei pe plan.

- **Obiective**

- Să determine urmele planului definit prin trei puncte necoliniare, două drepte paralele sau două drepte concurente;
- Să reprezinte în epură o dreaptă oarecare conținută în planul dat prin urme;
- Să construiască epura unui punct conținut în planul reprezentat prin urme;
- Să construiască epura unor figuri geometrice conținute într-un plan dat prin urme;
- să reprezinte în epură planele particulare;
- Să reprezinte în epură dreptele remarcabile ale planului dat prin urme;
- Să construiască urmele planului definit de dreapta de cea mai mare pantă față de fiecare plan de proiecție ;
- Să determine dreapta de intersecție dintre două plane;
- Să construiască epura punctului de intersecție dintre o dreaptă și un plan;
- Să reprezinte în epură o dreaptă perpendiculară pe un plan;
- Să construiască în epură un plan perpendicular pe alt plan.

3.1 Reprezentarea planului

Un plan, fiind determinat de trei puncte necoliniare, de două drepte concurente, de două drepte paralele, de o dreaptă și un punct exterior ei, se va reprezenta în epură cu ajutorul acestor elemente.

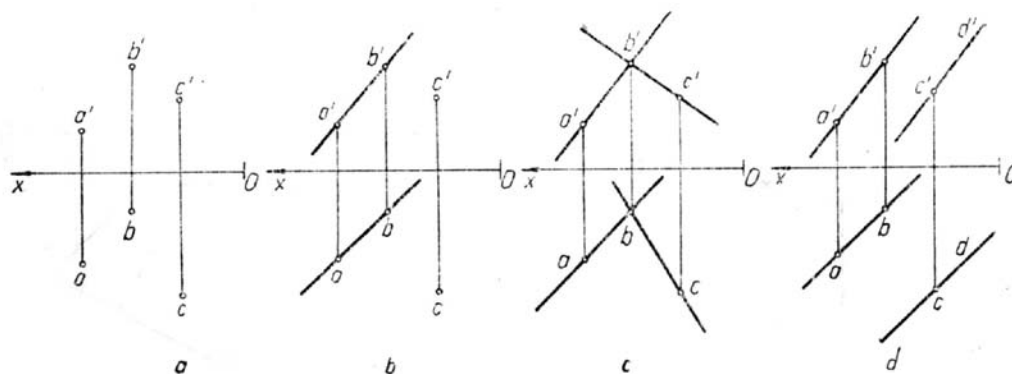


Fig. 48 a, b, c, d

Planul este determinat în epură dacă, dându-se una din proiecțiile unui punct sau ale unei drepte ce aparține planului, se poate construi cea de-a doua proiecție.

Fie un plan P dat prin dreptele $D(d, d')$ și $D_1(d_1, d_1')$ concurente în punctul $I(i, i')$. Considerăm d_2 proiecția orizontală a unei drepte D_2 conținută în planul P .

Această proiecție intersectează în a și a_1 proiecțiile d și d_1 . Acestea sunt proiecțiile orizontale ale punctelor de concurență dintre $\overline{D_2}$ și dreptele date D și D_1 .

Ducând linii de ordine din a și a_1 până la proiecțiile verticale ale dreptelor d' și d_1' găsim proiecțiile verticale a' și a_1' . Unind aceste puncte obținem proiecția verticală a dreptei D_2 conținută în planul P .

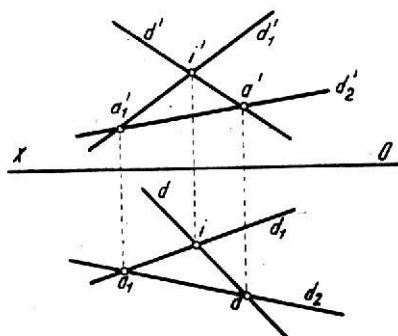


Fig. 49

În desenul tehnic se utilizează reprezentarea planului prin urmele lui (dreptele de intersecție ale planului cu planele de proiecție) deoarece se poate deduce poziția planului față de planele de proiecție.

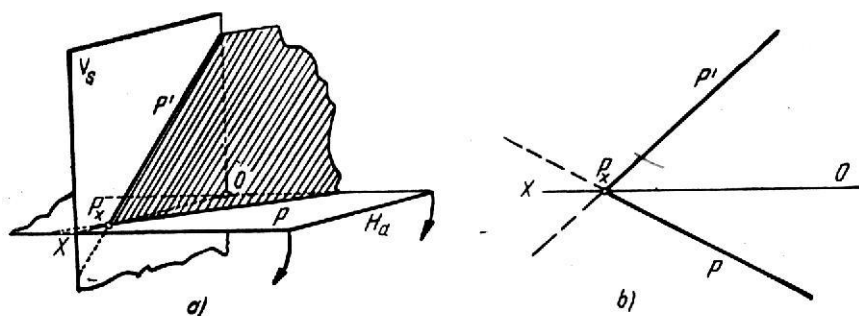


Fig. 50

Se consideră un plan P care intersectează planele triedrului de proiecție (fig. 51). Dreapta de intersecție a planului P cu $[H]$ se numește urma orizontală a planului și se notează cu P_h , intersecția lui $[P]$ cu $[V]$ se numește urma verticală și se notează cu P_v , intersecția lui $[P]$ cu $[W]$ se numește urma laterală a planului și se notează cu P_l . Planul P intersectează axele de proiecție în P_x, P_y, P_z care reprezintă și punctele de concurență ale urmelor planului

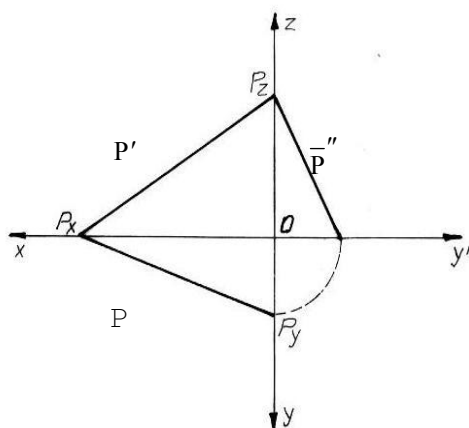


Fig. 51

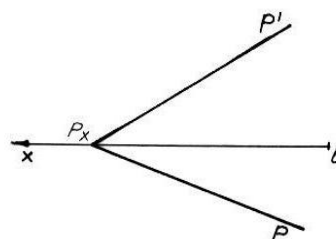


Fig. 52

Prin rotația planelor H și W în jurul axelor corespunzătoare suprapunerea pe $[V]$ se obține reprezentarea planului în epură (fig. 51).

În mod frecvent se utilizează reprezentări în două proiecții și planul este dat prin urma orizontală P_h . (fig. 52).

3.2 Dreaptă și punct ce aparțin unui plan

O dreaptă este cuprinsă într-un plan dacă două din punctele ei sunt cuprinse în plan. Aceste puncte pot fi urmele ei pe planele de proiecție și deoarece aceste puncte sunt comune și planului dat și planelor de proiecție, ele aparțin urmelor planului dat (fig.53).

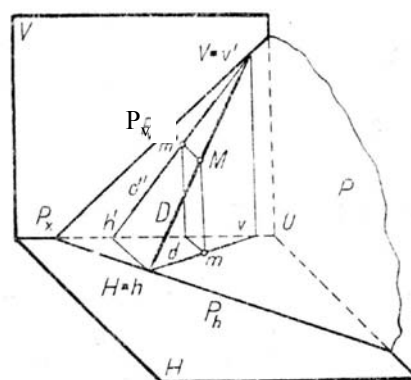


Fig. 53

Deci pentru ca o dreaptă să se găsească într-un plan trebuie ca urmele ei să se găsească pe urmele de același nume ale planului

Un punct oarecare M se găsește într-un plan dacă se află pe o dreaptă a planului.

În epură se exprimă că un punct aparține unui plan dacă proiecțiile lui aparțin proiecțiilor de același nume ale unei drepte din plan (fig.54).

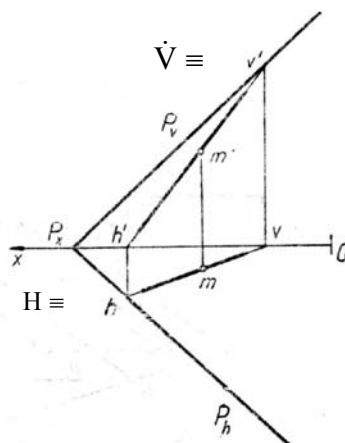


Fig. 54

3.3. Determinarea urmelor planului dat prin proiecțiile a două drepte concurente

Fie două drepte concurente $D(d, d')$ și $\Delta(\delta, \delta')$ care determină un plan ale cărui urme trebuie construite (fig. 55).

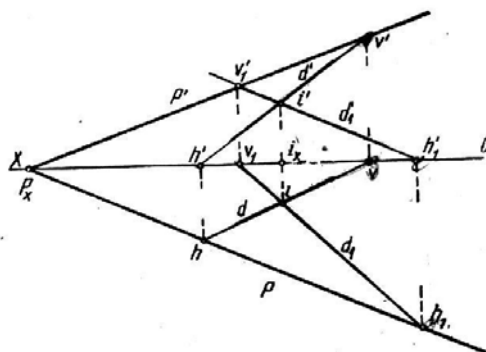


Fig. 55

Din cele prezentate până aici rezultă că urmele planului sunt determinate de urmele dreptelor date. Deci se construiesc urmele $H(h, h')$ și $V(v, v')$ ale dreptei D și $H_1(h_1, h_1')$ și $V_1(v_1, v_1')$ ale dreptei Δ . Se unesc urmele de același nume (h cu h_1 și v cu v_1) și se obțin urmele planului determinat de cele două drepte concurente. Ca verificare, cele două urme trebuie să se intersecteze în același punct P_x pe axa O_x .

3.4. Drepte remarcabile ale unui plan

a) **Orizontala planului** este dreapta conținută în plan și care este paralelă cu planul H (fig.56).

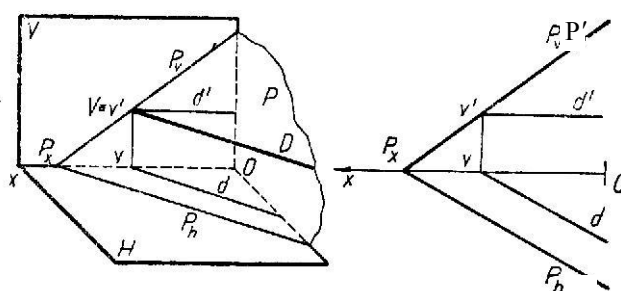


Fig. 56

Deoarece toate punctele dreptei au aceeași cotă, proiecția verticală a orizontalei planului este paralelă cu $\overline{O_x}$. Urma orizontală a dreptei fiind aruncată la infinit, rezultă că proiecția orizontală a dreptei este paralelă cu urma orizontală a planului P.

Se observă că urma orizontală a planului este orizontala sa, ale cărei puncte au cotă nulă.

b) **Frontala planului**, este dreapta conținută în plan, paralelă cu planul vertical de proiecție. Proiecția sa orizontală este paralelă cu linia de pământ, iar proiecția verticală paralelă cu urma P'' a planului, urma verticală a dreptei fiind aruncată la infinit

Urma verticală a planului este frontala sa, ale cărei puncte au depărtarea nulă (fig. 57).

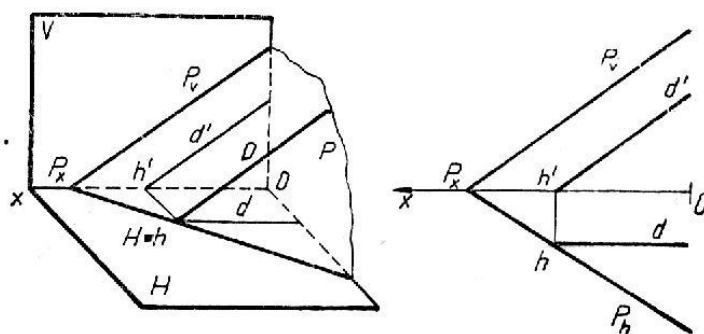


Fig. 57

c) **Dreapta de profil** a unui plan este dreapta conținută în plan și paralelă cu planul lateral de proiecție. Proiecția laterală a dreptei este paralelă cu urma laterală a planului, urma laterală a dreptei fiind aruncată la infinit.

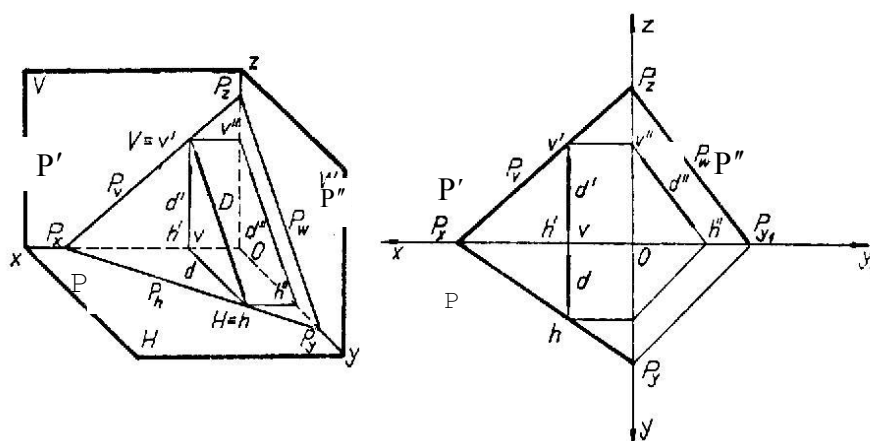


Fig. 58

Dreapta de cea mai mare pantă a unui plan în raport cu planul orizontal, este dreapta conținută în plan, perpendiculară pe urma orizontală a planului și pe toate horizontalele planului. Conform teoremei celor trei perpendiculare, proiecția orizontală a dreptei de cea mai mare pantă este perpendiculară pe urma orizontală a planului în urma orizontală a dreptei (fig. 59).

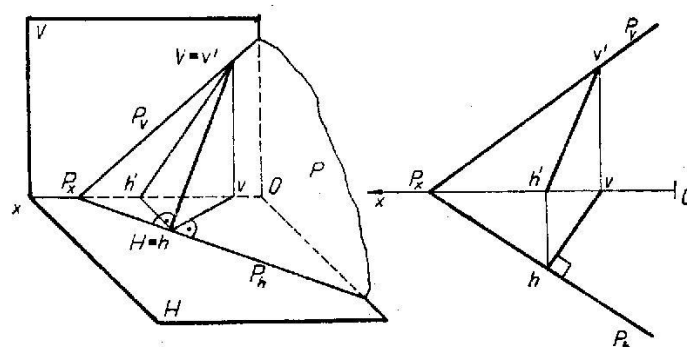


Fig. 59

Dreapta de cea mai mare pantă redă valoarea unghiului diedru format de plan cu planul orizontal de proiecție (fig. 60).

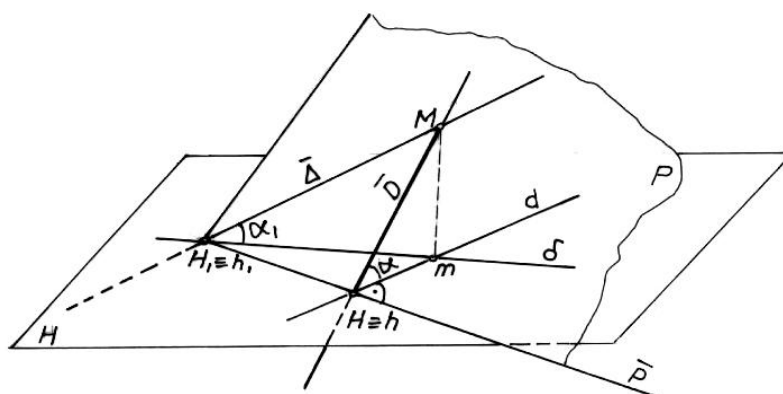


Fig. 60

$$\hat{\text{In}} \Delta \text{MmH}, \text{tg } \alpha = \frac{\text{Mm}}{\text{mH}}$$

În ΔMmH_1 , $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{Mm}{mH_1}$, cum $mH_1 > mH \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \alpha_1$. Dreapta MH este

dreapta de cea mai mare pantă a planului P față de planul orizontal de proiecție.

În mod analog se reprezintă dreapta de cea mai mare pantă a unui plan față de planul vertical de proiecție. Proiecția verticală a dreptei de cea mai mare pantă față de planul vertical de proiecție este perpendiculară pe urma verticală a planului (fig. 61).

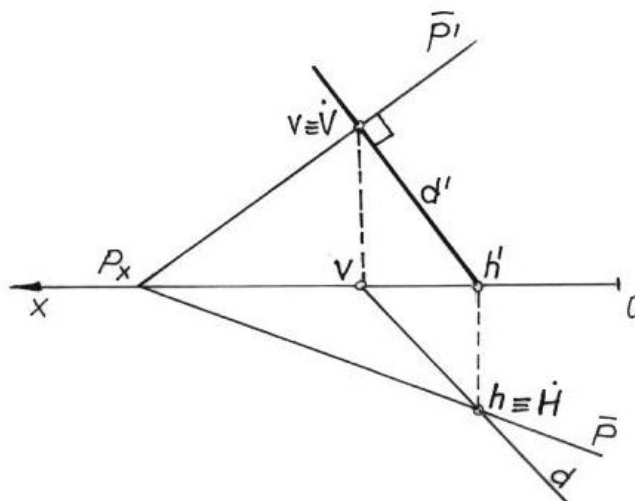


Fig. 61

Teoremă

Dreapta de cea mai mare pantă a unui plan determină complet planul.

Fie dreapta $D(d, d')$ dreapta de cea mai mare pantă față de planul orizontal de proiecție a planului ce trebuie determinat (fig. 62).

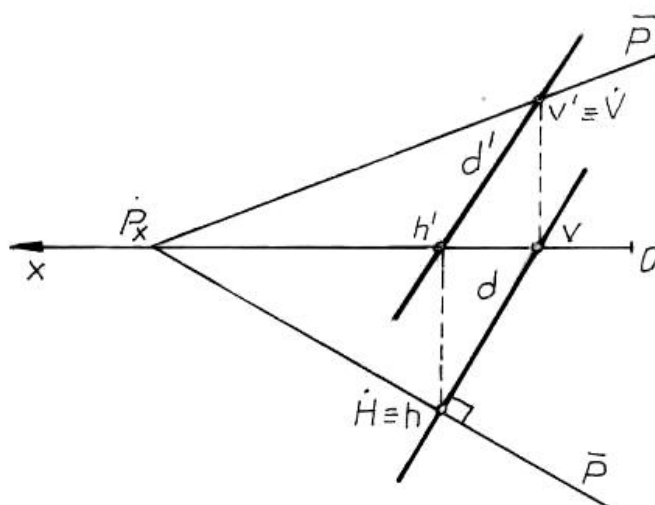


Fig. 62

Construim urmele dreptei $H(h, h')$ și $V(v, v')$. Perpendiculara în h pe d este urma orizontală $\bar{P}$ a planului P . Intersecția urmei $\bar{P}$ cu $\bar{O}_x$ este punctul P_x . Unind punctul P_x cu punctul v' obținem urma verticală $\bar{P}'$ a planului P . Planul este astfel determinat.

3.5 Plane particulare

Un plan ocupă o poziție particulară față de planele de proiecție dacă este paralel sau perpendicular pe unul din aceste plane.

3.5.1. Plane paralele cu unul din planele de proiecție

a) **Planul de nivel** este paralel cu planul orizontal de proiecție, urma sa orizontală este aruncată la infinit. (fig. 63 a, b).

Deoarece toate punctele acestui plan au aceeași cotă, urma verticală N' este paralelă cu $\bar{O}_x$.

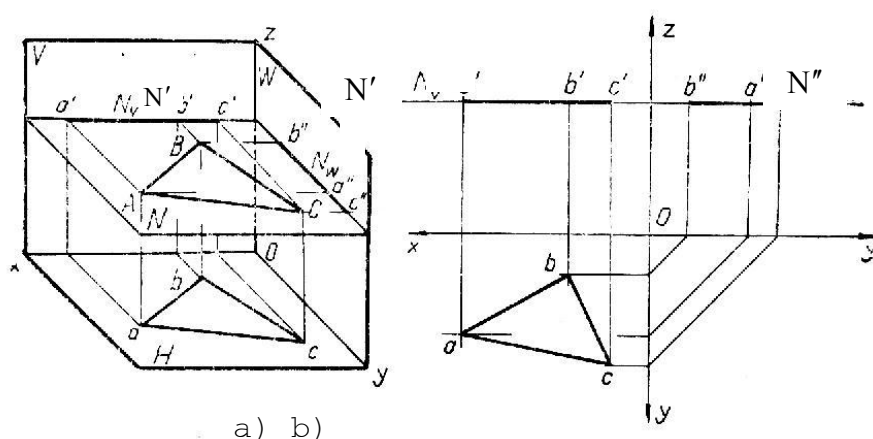


Fig. 63

O figură ABC cuprinsă în acest plan are proiecția verticală total deformată așternută pe urma verticală N' a planului, iar proiecția orizontală $a b c$ egală cu figura considerată. Reprezentarea planului de nivel poate fi făcută și în două proiecții, poziția în spațiu fiind complet determinată (fig. 64).

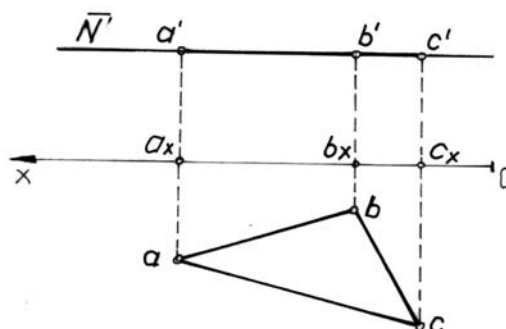


Fig. 64

b) **Planul de front** este paralel cu planul vertical de proiecție. Acest plan are urma verticală aruncată la infinit (fig. 65 a,b).

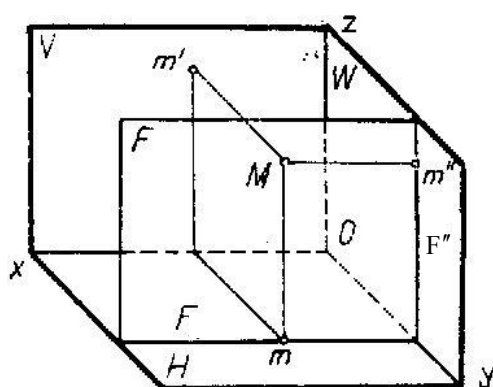


Fig. 65a

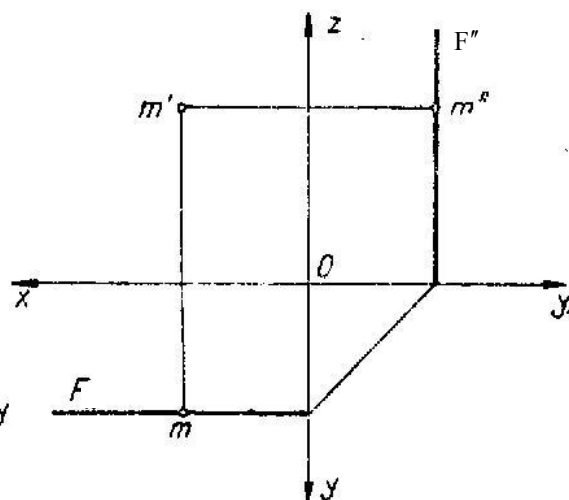


Fig. 65b

Deoarece toate punctele acestui plan au aceeași depărtare urma orizontală $\bar{F}$ este paralelă cu $\bar{O}_x$. Ca o consecință a paralelismului acestui plan cu planul vertical de proiecție, planul de front este perpendicular pe planul orizontal de proiecție și pe planul lateral de proiecție. Un punct M conținut de acest plan are proiecția orizontală m pe urma orizontală F a planului și proiecția laterală m'' pe urma laterală F'' .

Reprezentarea în epură se poate face și numai în două proiecții, planul fiind complet determinat (fig. 66).

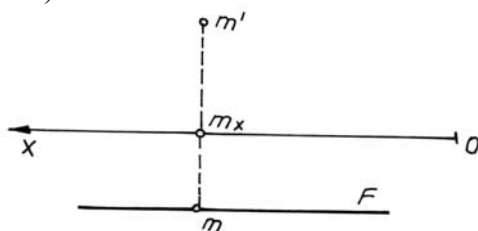


Fig. 66

c) **Planul de profil** este paralel cu planul lateral de proiecție. Urmă sa laterală este aruncată la infinit. Urmele orizontală și verticală, paralele cu $\bar{O}_y$ și respectiv $\bar{O}_z$ sunt perpendiculare în același punct pe $\bar{O}_x$ (fig. 67 a,b).

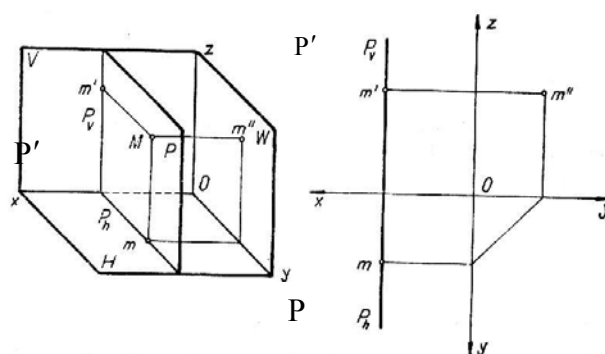


Fig. 67

3.5.2. Plane perpendiculare pe unul din planele de proiecție

a) **Planul vertical** sau proiectant față de planul orizontal de proiecție, este perpendicular pe [H] (fig. 68)

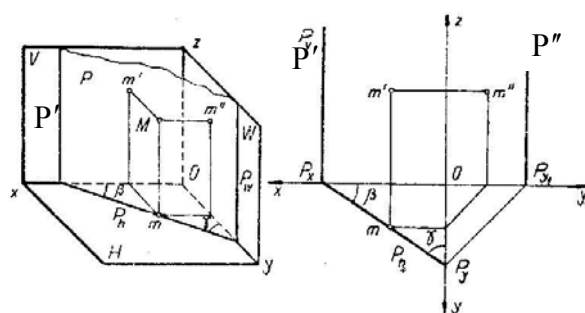


Fig. 68

Urma sa verticală P' este perpendiculară pe axa Ox , iar urma laterală P'' , perpendiculară pe axa Oy . Unghiurile diedre formate de plan cu planele de proiecție se proiectează la adevărata mărime pe planul orizontal, fiind egale cu unghiurile formate de urma orizontală a planului cu axele Ox și Oy . Un punct $M(m, m', m'')$ conținut în planul P , proiectant pe planul H , are proiecția orizontală m , situată pe urma orizontală $\bar{P}$ a planului.

Reprezentarea acestui plan poate fi făcută în epură și în două proiecții, planul fiind complet determinat (fig. 69).

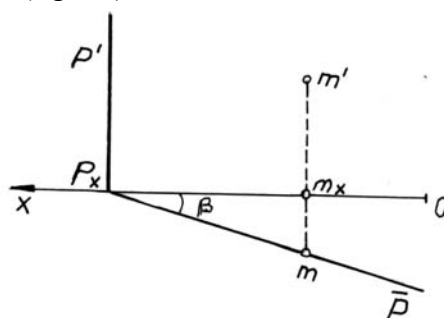


Fig. 69

b) **Planul de capăt** sau proiectant pe planul vertical de proiecție este perpendicular pe planul vertical de proiecție (fig. 70). Urma sa orizontală P este

perpendiculară pe $\bar{O}_x$ iar urma sa laterală P'' este perpendiculară pe $\bar{O}_z$. Unghiurile diedre formate de plan cu planele de proiecție se proiectează la adevărata mărime pe planul vertical de proiecție fiind egale cu unghiurile formate de urma verticală P' cu axele Ox , respectiv, Oz .

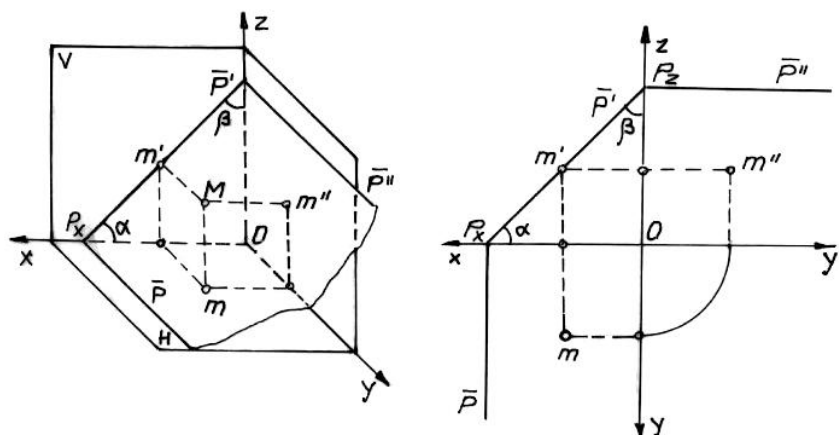


Fig 70

Un punct $M(m, m', m'')$ conținut de planul P , proiectant pe planul V , are proiecția verticală v' pe urma verticală P' a planului.

Reprezentarea acestui plan poate fi făcută în epură și în două proiecții conform figurii 71.

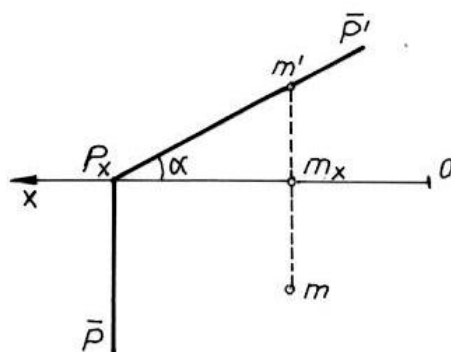


Fig. 71

- c) **Planul paralel cu axa Ox** este perpendicular pe planul lateral de proiecție (fig. 72).

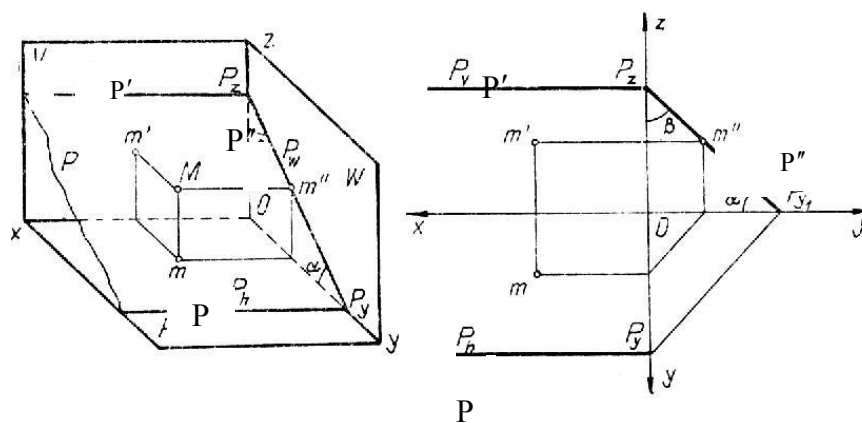


Fig. 72

Urmele P și P' sunt paralele cu $\overline{Ox}$. Unghiurile diedre formate de planul P cu planele de proiecție se proiectează la adevărata mărime pe planul lateral de proiecție, fiind egale cu unghiurile formate de urma laterală P'' cu axele Oy , respectiv Oz . Un punct $M(m, m', m'')$ conținut în planul P , proiectat pe planul W , are proiecția laterală m'' situată pe urma laterală P'' a planului.

d) **Planul care trece prin axa Ox** se mai numește și plan axial și este perpendicular pe planul lateral de proiecție (fig 73 a,b,c)

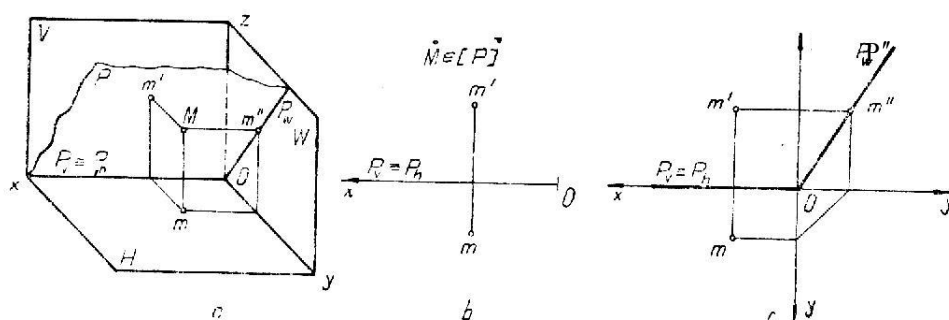


Fig. 73a, b, c

În epură, poziția unui plan axial este determinată dacă se dau proiecțiile unui punct conținut de plan (fig 73 b) sau urma laterală a planului (fig. 73, c).

3.6. Pozițiile relative a două plane

Două plane pot fi: paralele, concurente sau confundate. Planele concurente pot fi perpendiculare sau se pot întâlni sub un unghi oarecare.

a) **Plane paralele** Două plane paralele au urme de același nume paralele între ele (fig. 74).

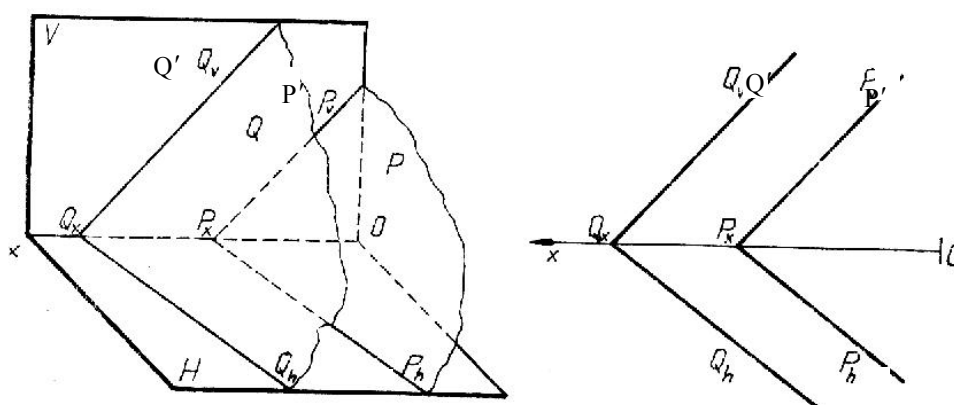


Fig 74

Această reprezentare se bazează pe următoarea teoremă: două plane paralele se intersectează cu un al treilea, după două drepte paralele. Deci, două plane paralele au în epură urmele lor pe cele trei plane de proiecție paralele și reciproc: dacă urmele

a două plane P' și Q pe cele trei plane de proiecție sunt paralele, planele date sunt paralele (fig. 75).

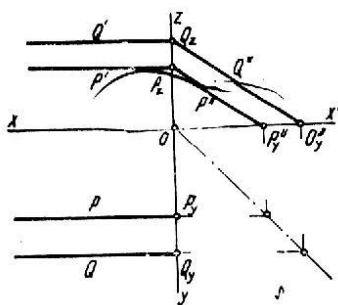


Fig. 75

b) **Plane concurente** Două plane concurente se intersectează după o dreaptă. Planele concurente se pot întâlni sub un unghi oarecare sau pot fi perpendiculare.

Pentru a determina dreapta de intersecție a două plane, se stabilesc două puncte comune celor două plane (fig. 76) sau un punct comun și direcția (poziția) dreptei de intersecție (fig. 77).

În figura 76 se determină dreapta de intersecție a planelor P și Q , stabilind două puncte comune celor două plane. Planele P și Q fiind reprezentate prin urme, punctele comune sunt situate la intersecția urmelor de același nume ale planelor.

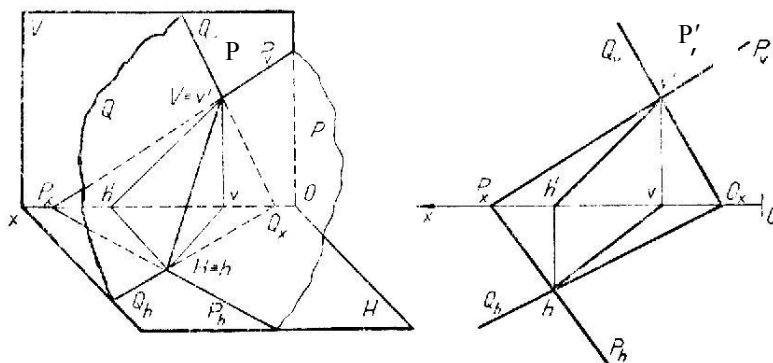


Fig. 76

La intersecția urmelor orizontale ale planelor, rezultă un punct $H(h, h')$, iar la intersecția urmelor verticale rezultă un punct $V(v, v')$. Pentru dreapta de intersecție a celor două plane, punctele H și V reprezintă urmele dreptei.

În figura 77, planele P și Q sunt perpendiculare pe planul orizontal de proiecție, deci și dreapta lor D intersecție va fi perpendiculară pe planul orizontal. La intersecția urmelor orizontale ale planelor, rezultă un punct comun, care corespunde cu urma orizontală și cu proiecția orizontală a dreptei, dreapta de intersecție fiind verticală.

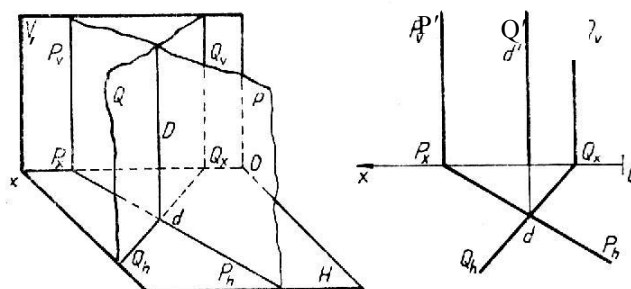


Fig. 77

3.7. Poziția unei drepte față de un plan

În raport cu un plan o dreaptă poate fi paralelă, concurentă sau cuprinsă în plan.

a) Dreapta paralelă cu un plan

O dreaptă este paralelă cu un plan dacă este paralelă cu o dreaptă conținută de acel plan (fig. 78). Dreapta D_1 este paralelă cu planul P , deoarece este paralelă cu dreapta D , conținută de planul P .

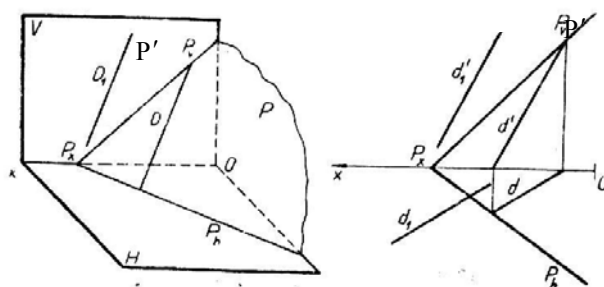


Fig. 78

b) Dreaptă concurentă cu un plan

Pentru determinarea punctului de intersecție dintre o dreaptă și un plan se pot aplica mai multe metode, dintre care, în continuare este prezentată **metoda planului auxiliar**.

Fie un plan P și o dreaptă D concurentă cu acesta (fig. 79). Fazele determinării punctului I de intersecție dintre planul P și dreapta D sunt:

- se duce prin dreapta D un plan auxiliar Q , $\overline{D} \subset [Q]$;
- se determină dreapta de intersecție Δ dintre cele două plane P și Q , $[P] \cap [Q] = \overline{\Delta}$;
- se stabilește punctul de intersecție I , dintre dreapta dată D și dreapta de intersecție $\overline{\Delta}$, care reprezintă punctul de intersecție dintre dreaptă și plan, $\overline{D} \cap \overline{\Delta} = I = \overline{D} \cap [P]$.

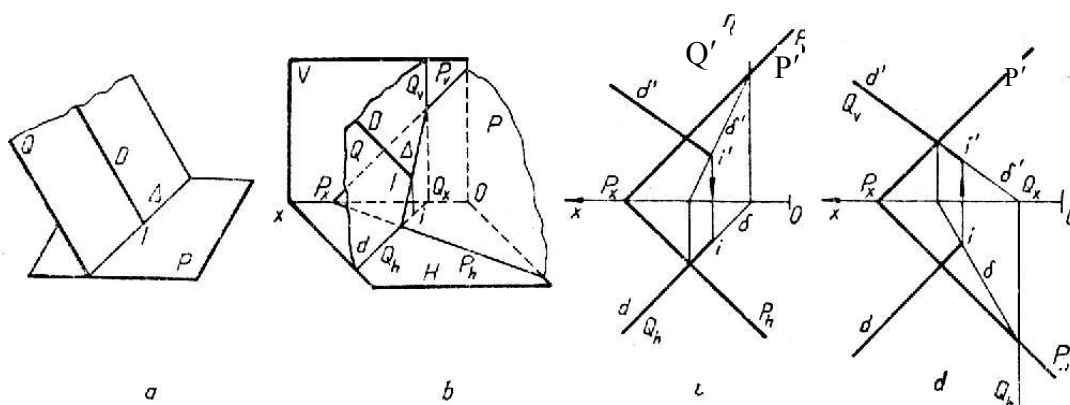


Fig. 7.9

În exemplul din figura 7.9b și 7.9c, s-a utilizat ca plan auxiliar care conține dreapta D, un plan vertical, iar în figura 7.9d, un plan de capăt.

3.8. Perpendicularitate

a) Dreaptă perpendiculară pe un plan

O dreaptă perpendiculară pe un plan are proiecțiile perpendiculare pe urmele de același nume ale planului. Se consideră dreapta D, perpendiculară pe planul P, pe care-l intersectează în punctul I (fig. 80).

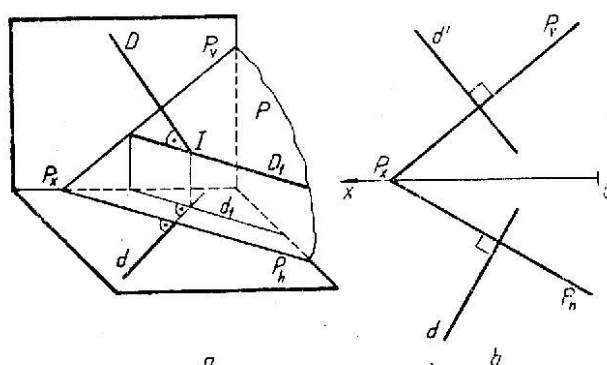


Fig. 80

Prin punctul de intersecție I, se consideră D_1 , ca dreaptă de nivel a planului. Dreapta D va fi perpendiculară și pe dreapta D_1 . Conform teoremei unghiului drept, cele două drepte vor avea proiecțiile orizontale d și d_1 perpendiculare între ele. Proiecția orizontală d_1 fiind paralelă cu urma orizontală a planului rezultă că proiecția orizontală d va fi perpendiculară pe urma orizontală $\bar{P}$ a planului. Dacă prin punctul I se consideră și o frontală a planului, rezultă că proiecția d' va fi perpendiculară pe urma verticală $\bar{P}'$ (fig. 80,b).

b) Plane perpendiculare între ele

Două plane sunt perpendiculare între ele dacă o dreaptă conținută în unul din plane este perpendiculară pe cel de-al doilea (fig. 81). Se consideră planul P dat prin urmele $\bar{P}$ și $\bar{P}'$ și $M(m, m')$ exterior planului.

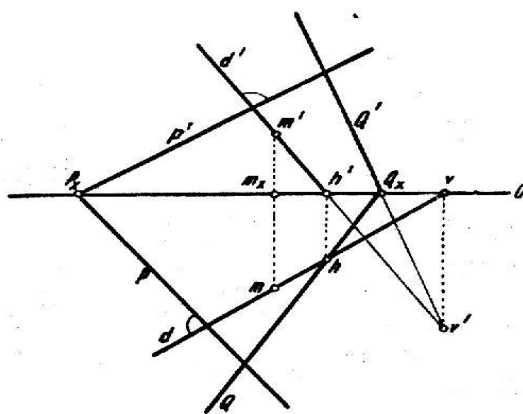


Fig. 81

Pentru a obține un plan perpendicular pe $[P]$ care trece prin M , se duc prin m și m' dreptele $d \perp \overline{P}$ și $d' \perp \overline{P'}$. Urmele planului căutat trec prin urmele acestei drepte. O dreaptă oarecare $\overline{Q'} \in [V]$ care trece prin v' este urma verticală a planului căutat; urma orizontală Q se obține unind Qx cu h . Deoarece $\overline{Q'}$ este o dreaptă arbitrară care trece prin v' , problema admite o infinitate de soluții.

Observație. Între urmele a două plane perpendiculare între ele nu se poate stabili o relație de poziție. Excepție fac planele proiectante pe același plan de proiecție: două plane perpendiculare între ele și proiectante pe un același plan de proiecție au urmele înclinate față de $\overline{Ox}$ perpendiculare între ele, iar unghiul dintre urme este unghiul plan corespunzător unghiului diedru al celor două plane.

Idei de reținut

- Urmele planului sunt dreptele de intersecție ale planului cu planele de proiecție;
- Dreapta conținută în plan, la reprezentarea în epură, are urmele situate pe urmele de același nume ale planului;
- Un punct aparține unui plan dacă este conținut de o dreaptă aparținând planului;
- Planele paralele cu unul din planele de proiecție sunt, în consecință, perpendiculare pe celelalte două plane de proiecție;
- Planele perpendiculare pe unul din planele de proiecție au două urme perpendiculare pe axele comune ale celorlalte două plane de proiecție cu planul pe care acestea sunt perpendiculare sau două urme sunt paralele cu axa perpendiculară pe planul pe care planele date sunt perpendiculare;
- Dreapta de intersecție a două plane are urmele la intersecția urmelor de același nume ale planelor;
- Orizontalele planului au, toate, proiecțiile orizontale paralele cu cu urma orizontală aplanului;
- Frontalele planului au, toate, proiecțiile verticale paralele cu urma verticală a planului;
- Dreptele de profil ale planului au, toate, proiecțiile laterale paralele cu urma laterală a planului;
- Dreapta de cea mai mare pantă a unui plan față de unul din planele de proiecție are o proiecție perpendiculară pe urma planului conținută de planul de proiecție față de care se definește;

- Dreapta de cea mai mare pantă a unui plan față de unul din planele de proiecție, determină planul;
- Dreapta perpendiculară pe un plan, are proiecțiile, la reprezentarea în epură, perpendiculare pe urmele de același nume ale planului;
- Punctul de intersecție dintre o dreaptă și un plan se găsește la intersecția dreptei cu o dreaptă din planul dat, care la rândul ei este obținută din intersecția unui plan (auxiliar) luat prin dreapta dată, și planul dat.

Probleme rezolvate

1. Să se construiască urmele planului Q, dat prin dreptele AB și CD (fig.1).

Rezolvare

Se găsește mai întâi una din urmele planului, de exemplu urma verticală $\overline{Q'}$. Dacă această urmă intersectează axa Ox în cadrul epurei și cum prin acest punct de intersecție trebuie să treacă și urma orizontală a planului, este suficient să se găsească numai pentru una din cele două drepte, urma orizontală. În figura 3.1, urma verticală intersectează axa de proiecție în Q_x iar pentru dreapta AB a fost găsită și urma orizontală. Cele două puncte, tăietura Q_x și urma $\dot{H} \equiv h$ determină urma orizontală $\overline{Q}$ a planului dat.

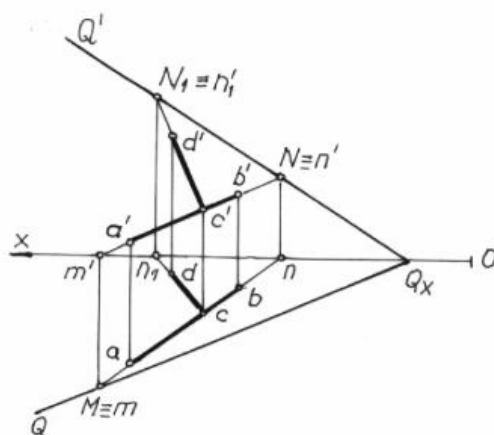


Fig.1

2. Să se construiască dreapta de intersecție dintre planul oarecare P și planul de nivel N (fig.3.5a).

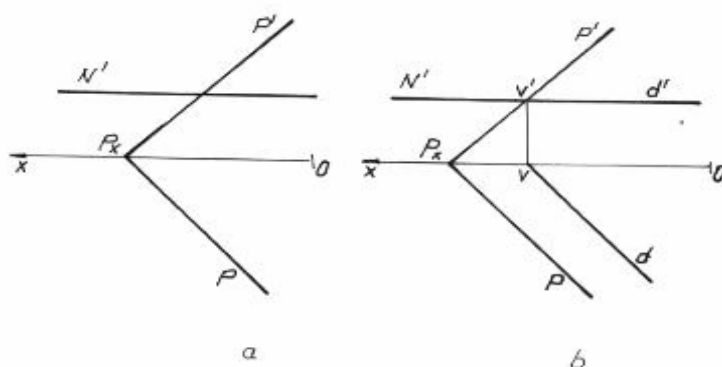


Fig.2 a, b

Rezolvare

Dreapta de intersecție dintre cele două plane va fi o dreaptă de nivel. Proiecția verticală d' trece prin punctul v' și este confundată cu urma verticală N' a planului de nivel. Proiecția orizontală d , trece prin punctul v și este paralelă cu urma orizontală $\overline{P}$ a planului P (fig. 2, b).

Probleme propuse spre rezolvare

3. Să se determine urmele planului, definit de dreptele concurente în punctul A :
 $\overline{D}(d, d') \{ \dot{A}(70, 25, 30); \dot{B}(90, 5, 20) \}$
 $\overline{D}_1(d_1, d'_1) \{ \dot{A}(70, 25, 30); \dot{B}_1(60, 25, 20) \}$, și să se construiască orizontala planului ce trece prin punctul A .
4. Să se determine planul P având: $\dot{P}_x(60, 0, 0)$, $\dot{P}_y(0, 45, 0)$, $\dot{P}_z(0, 0, 40)$. În acest plan să se determine proiecțiile punctului $\dot{A}(30, 15, z)$.
5. Se dă un plan P printr-o dreaptă de profil și un punct oarecare, și un al doilea plan Q , prin dreapta de cea mai mare pantă față de planul orizontal de proiecție. Să se afle proiecțiile dreptei lor de intersecție, fără ajutorul urmelor celor două plane.
6. Să se construiască proiecțiile punctului $\dot{A}$, de intersecție dintre :
 a) un plan oarecare P și o dreaptă fronto-orizontală, $\overline{D}_1$;
 b) un plan oarecare R și o dreaptă verticală, $\overline{D}_2$;
 c) un plan de front F și o dreaptă de capăt.
7. Să se construiască epura punctului comun $I(i, i')$ al planelor P, Q, R unde:
 a) $[P]$ - oarecare;
 $[Q]$ - de front;
 $[R]$ - oarecare.
 b) $[P]$ - de nivel;
 $[Q]$ - de profil;
 $[R]$ - oarecare.
 c) $[P]$ - vertical;
 $[Q]$ - conține $\overline{Ox}$;
 $[R]$ - de front.

Cap 4. Metodele geometriei descriptive

- Problemele geometriei descriptive, complicate datorită poziției elementelor din spațiu implicate în acestea, își pot simplifica rezolvarea dacă se folosesc metode ce permit aducerea punctelor, dreptelor, planelor în poziții particulare față de planele de proiecție. Metoda prezentată în curs este metoda rabaterii (caz particular al rotației), care, la rândul ei, se poate efectua prin metoda triunghiului de poziție sau metoda orizontalelor sau frontalelor planului. Figuri geometrice cuprinse într-un plan, având proiecții deformate în epură, își află adevărata mărime utilizând rabaterea. Tot așa, forme geometrice regulate, situate într-un plan, își pot găsi proiecțiile prin operația inversă rabaterii, numită ridicarea rabaterii.

- **Obiective**

- Să determine rabaterea unui punct din plan, pe unul din planele de proiecție, prin metoda triunghiului de poziție;
- Să determine rabaterea unui punct din plan, pe unul din planele de proiecție, prin metoda dreptelor de nivel sau frontalelor planului;
- Să determine rabaterea unui plan oarecare pe fiecare din planele de proiecție;
- Să determine rabaterea unui plan proiectant pe fiecare din planele de proiecție ale reperului;
- Să determine proiecțiile unui punct din plan, fiind dată rabaterea lui pe unul din planele de proiecție;
- Să determine adevărata mărime a unghiului dintre două drepte, prin rabaterea dreptelor pe unul din planele de proiecție ;
- Să determine proiecțiile unor figuri geometrice regulate cu ajutorul ridicării rabaterii.

4.1. Schimbarea planelor de proiecție, rotația, rabaterea – generalități

Gradul de simplitate al unei probleme de geometrie descriptivă depinde adesea de poziția figurilor față de planele de proiecție. Pentru a îndepărta unele dificultăți grafice care rezultă din poziția pe care elementele unei figuri le au față de planele de proiecție este necesar să se utilizeze un sistem de plan de proiecție paralele cu aceste elemente, sau să se aducă elementele respective în poziții paralele cu planele de proiecție. În primul caz, sistemul poartă denumirea de schimbarea planelor de proiecție, iar dacă se modifică poziția elementelor din spațiu, păstrându-se fixe planele de proiecție, se efectuează o operație de rotație sau de rabatere/

Metoda schimbării de plan constă în schimbarea planelor de proiecție cu alte două plane de proiecție perpendiculare între ele. Problema generală se exprimă astfel:

Fiind dată o figură F în spațiu prin proiecțiile sale f și f' pe planele ortogonale H și V , să se găsească proiecțiile ei f_1 și f_1' pe alte două plane H_1 și V_1 de asemenea ortogonale între ele.

Din punct de vedere teoretic, problema nu prezintă nici o dificultate, dar execuția grafică în cazul schimbării simultane a planelor de proiecție este foarte laborioasă; de aceea, problema generală enunțată mai înainte se reduce la cazul particular când unul din planele de referință ale reperului nou coincide cu unul din planele reperului dat. În acest fel, în problema schimbării planelor de proiecție se consideră schimbarea separată a fiecărui plan de proiecție.

Prin metoda rotației se aduce o figură F să ocupe o poziție favorabilă în raport cu planele de proiecție. Rotirea se face în jurul unei axe convenabil alese. Deoarece rotația în jurul unui ax oarecare implică construcții grafice dificile, se consideră de obicei axe verticale sau de capăt. Se pot executa rotații de nivel, de front sau în jurul unei axe oarecare.

Un caz particular al rotației este rabaterea.

Rotația planului unei figuri F până coincide sau devine paralel cu unul din planele de proiecție se numește rabatere.

Axa este una dintre urme sau o dreaptă a planului paralelă cu una din urme. A rabate un punct sau o dreaptă înseamnă a rabate planul determinat de punct și de axă. Se obișnuiește să se spună rabaterea punctului sau a dreptei, subînțelegând însă că este vorba de rabaterea planului în care se găsește punctul sau dreapta. Poziția rabătută a unui punct conținut de un plan se poate determina prin mai multe metode: construind triunghiul de rabatere sau de poziție, determinând poziția rabătută a unei drepte particulare a planului care trece prin punctul respectiv sau utilizând proprietățile afinității.

4.2. Rabaterea unui punct, construind triunghiul de rabatere (de poziție)

Fie planul P și punctul $M(m, m')$, conținut de planul P și de dreapta de nivel $D(d, d')$ a planului (fig. 82).

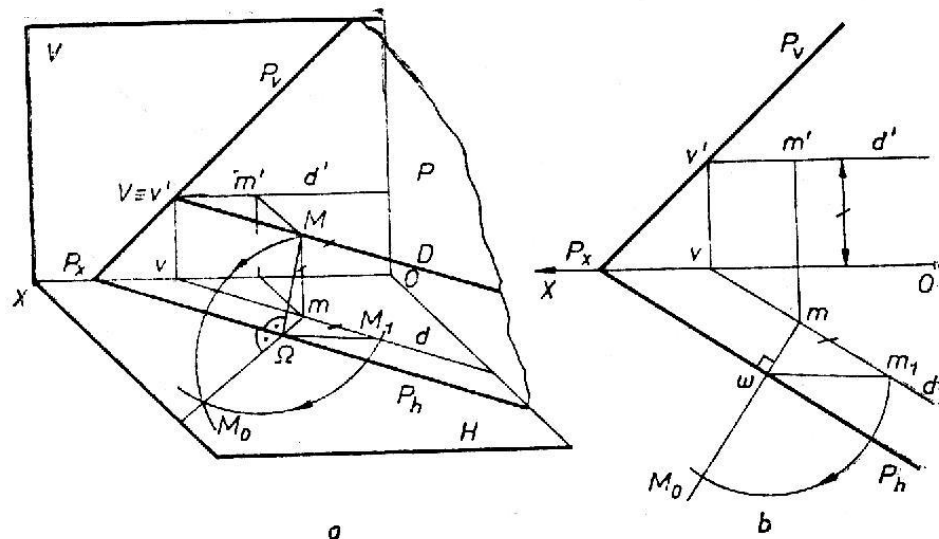


Fig. 82

Dacă se rotește planul P , în jurul urmei orizontale $\overline{P'}$ (fig. 82), punctul M va descrie un arc de cerc, având raza egală cu perpendiculara coborâtă din punct pe urma orizontală a planului. Punctul Ω în care perpendiculara intersectează urma orizontală a planului se numește centru de rabatere. Segmentul $M\Omega$ se numește rază de rabatere, iar urma orizontală $\overline{P}$ a planului, în acest caz, devine **axă de rabatere**. Triunghiul $Mm\Omega$ având unghiul drept în m , se numește triunghi de rabatere sau triunghi de poziție.

În momentul în care planul P ajunge pe planul orizontal de proiecție punctul M va fi situat pe perpendiculara $m\Omega$, notat cu M_0 , care corespunde cu poziția rabătită a punctului M .

Pentru a determina poziția rabătită M_0 , a unui punct M , conținut de un plan, în reprezentarea plană (în epură) (fig. 82,b), se consideră că se rotește triunghiul de rabatere $Mm\Omega$, în jurul catetei $m\omega$, până va coincide cu planul orizontal. Cateta mm_1 este egală cu cota punctului (m', m_x), iar ipotenuza ωm_1 reprezintă adevărata mărime a razei de rabatere. Cu vârful compasului în centrul de rabatere ω și cu deschiderea egală cu raza de rabatere ωm_1 , se descrie un arc de cerc care intersectează perpendiculara pe axa de rabatere din proiecția orizontală m în punctul M_0 , care reprezintă poziția rabătită punctului M .

4.3. Rabaterea unei drepte particulare a planului

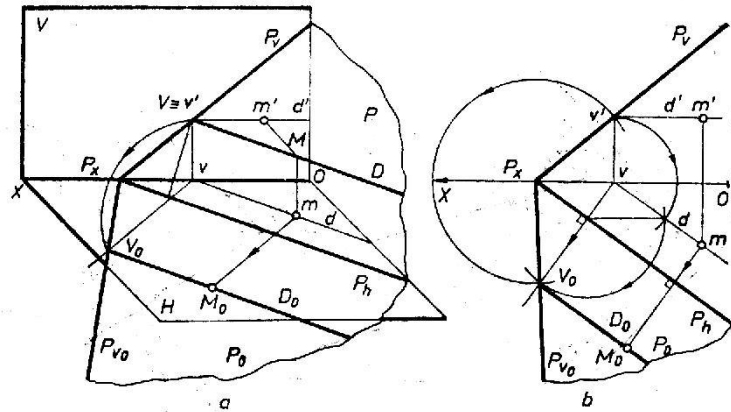


Fig. 83

Se consideră planul P și dreapta de nivel D , conținută de plan (fig. 83a).

Pentru a determina poziția rabătută D_0 a dreptei de nivel, se rabate urma

verticală V , utilizând triunghiul de poziție (fig. 83 b). Orice punct situat pe axa de rabatere corespunde totdeauna cu propriul său rabătuț, în consecință și punctul P_x , comun urmei orizontale $\bar{P}$ și urmei verticale P' rămâne neschimbat. Dacă se unește punctul P_x cu punctul V_0 se obține urma verticală a planului P_0' , în poziție străbătută.

Trasând din V_0 o paralelă la urma orizontală $\bar{P}$, se determină dreapta de nivel D_0 în poziție rabătută. Perpendiculara din proiecția orizontală m , pe axa de rabatere $\bar{P}$, intersectează orizontala rabătută D_0 în punctul M_0 care reprezintă poziția rabătută a unui punct M conținut de planul P .

Segmentele $P_x v'$ și $P_x V_0$ fiind egale, rezultă că punctul V_0 se poate determina prin intersectarea arcului de cerc având centrul în P_x și raza $P_x v'$ cu perpendiculara coborâtă din proiecția orizontală v , pe axa de rabatere $\bar{P}$.

4.4. Rabaterea de nivel

Pentru a reduce dimensiunile unor reprezentări grafice, este necesar, uneori, să se efectueze operația de rabatere pe un plan paralel cu planul de proiecție (fig. 84 a). În cazul în care planul pe care se execută rabaterea este un plan de nivel, construcția poartă denumirea de rabatere de nivel. Figura rabătută pe planul de nivel se proiectează în adevărata mărime pe planul orizontal de

proiecție. Rabaterea de nivel se execută prin construcția triunghiurilor de rabatere, sau prin utilizarea afinității.

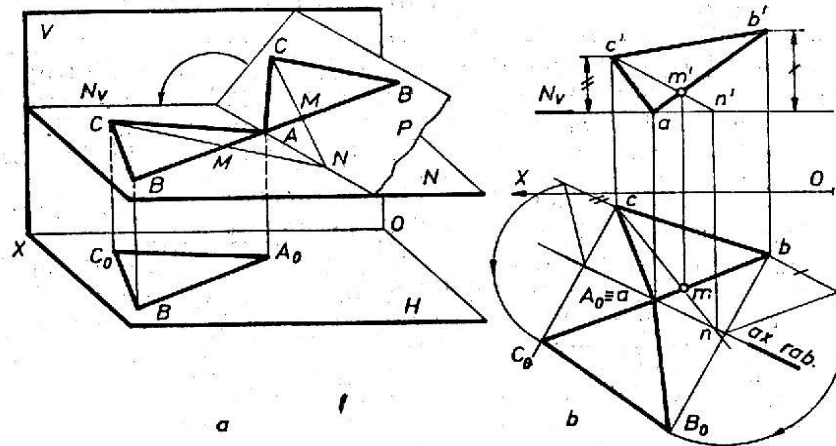


Fig. 84 a,b

Pentru a determina adevărata mărime a triunghiului ABC (fig 84), se rabate planul triunghiului pe planul de nivel ce trece prin punctul A și deci corespunde cu propriul său rabătut. Axa de rabatere AN se determină, utilizând dreapta CM, conținută de plan. Pentru construcția triunghiurilor de rabatere (fig. 84, b) se măsoară cotele până la planul de nivel.

4.5. Rabaterea planelor proiectante

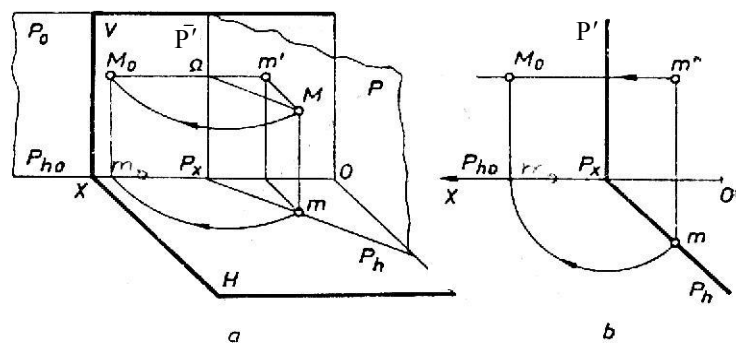


Fig. 85 a, b

- **Plan proiectant față de planul H**

Fie planul $P \perp [H]$ și un punct $M \in [P]$ (fig. 85). Pentru a rabate acest plan pe planul vertical de proiecție, se rotește în jurul urmei verticale P' până coincide cu planul vertical. Punctele conținute în plan se rotesc împreună cu el, descriind arce de cercuri care corespund aceluiași unghiuri și ale căror plane sunt de nivel (fig. 85 a). Dacă punctul $M(m, m') \in [P]$, în urma rotației proiecția orizontală $m \rightarrow m_0 \in \overline{Ox}$, iar rabaterea M_0 a punctului M este dată de intersecția dintre linia de ordine a punctului m cu paralela la $\overline{Ox}$ descrisă de m' (fig. 85, b).

Dacă planul P se rabate pe planul orizontal (fig. 86 a,b), raza de rabatere este egală cu cota punctului.

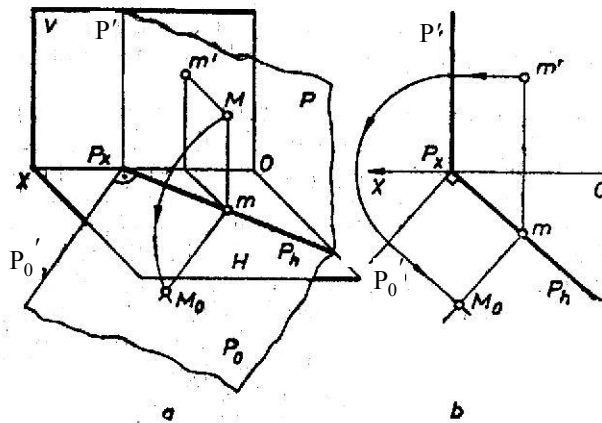


Fig. 86 a,b

- **Plan proiectant față de planul V**

Fie $[P]$ un plan proiectant față de $[V]$, care conține triunghiul ABC (abc a' b' c'). Pentru a afla adevărata mărime a acestui triunghi printr-o rabatere pe planul orizontal, se construiește rabaterea $A_0(a, a')$ (fig. 87 a). Axa de rabatere este $\overline{P}$, raza de rabatere $P_x a'$. Prin rabatere $a' \rightarrow a_1 \in \overline{Ox}$. Rabaterea punctului A , punctul A_0 se găsește la intersecția liniei de ordine din a_1 cu paralela la $\overline{Ox}$ dusă din a . Analog se procedează cu punctele B și C .

Pentru a obține adevărata mărime a triunghiului ABC conținut în $[P]$ printr-o rabatere pe planul vertical de proiecție (fig. 87 b) se folosește urma orizontală P a cărei rabatere este $\overline{P_0} \perp \overline{P'}$. Rabaterea A_0 a punctului $A_0(a, a')$ se găsește la intersecția dintre perpendiculara dusă în a' pe $\overline{P'_1}$ cu perpendiculara dusă din a_1 pe $\overline{P_0}$ ($\overline{a_x a} = \overline{P_x a_1} = \overline{a' A_0}$). Rabaterea celorlalte puncte se obțin în mod analog.

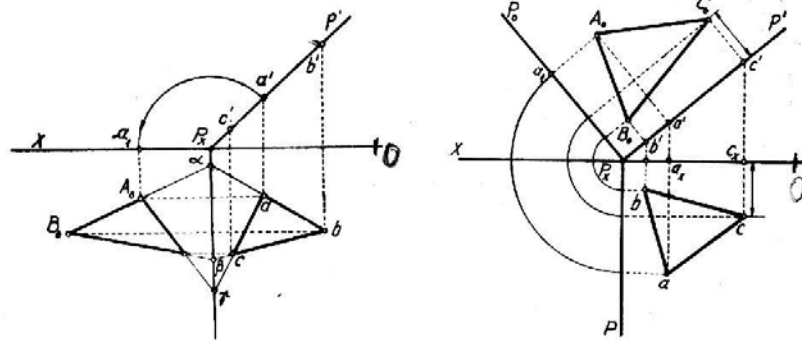


Fig. 87 a,b

4.6. Ridicarea rabaterii

Ridicarea rabaterii este operația inversă rabaterii și împreună cu operația rabaterii constituie metoda rabaterii. Această operație constă în construcția proiecțiilor unor elemente geometrice, pornind de la pozițiile lor rabătute.

Se consideră punctul M_0 , conținut de planul P , în poziție rabătută pe planul orizontal de proiecție (fig. 88a). Pentru a construi proiecțiile punctului M , se consideră prin punct o dreaptă de nivel D_0 , în poziție rabătută (fig. 88b), având urma verticală V_0 . din V_0 se duce o perpendiculară pe urma orizontală P , care intersectează axa Ox în punctul v , proiecția orizontală a urmei verticale.

Din v se ridică o perpendiculară pe axa Ox , iar din P_x , cu raza $P_x V_0$, se descrie un arc de cerc care intersectează linia de ordine în punctul v' , urma verticală a dreptei de nivel. Unind punctul P_x cu v' se obține urma verticală P' a planului, iar din v și v' se trasează proiecțiile d și d' ale dreptei de nivel.

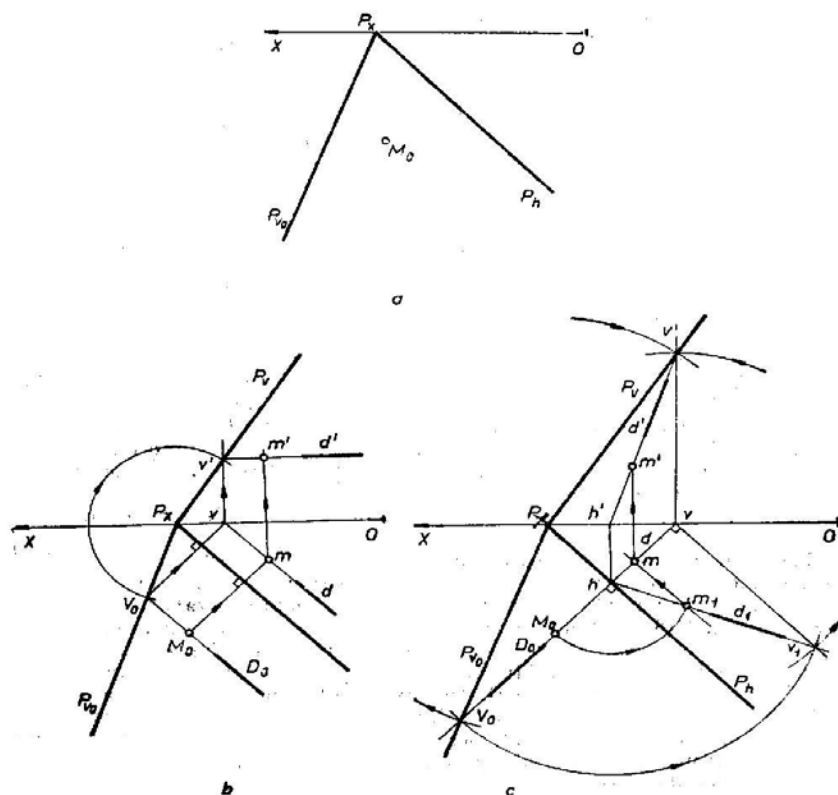


Fig. 88

Perpendiculara din M_0 pe $\bar{P}$ intersectează proiecția orizontală a punctului M . Trasând linia de ordine se determină proiecția verticală m' .

Proiecțiile punctului M se pot determina și utilizând dreapta de cea mai mare pantă a planului față de planul orizontal, care trece prin punctul M (fig. 88,c). Prin M_0 se consideră dreapta de cea mai mare pantă rabătută D_0 , perpendiculară pe urma orizontală P și proiecția orizontală d , respectiv proiecția orizontală a urmei verticale. Din h ca centru, cu raza hV_0 , se descrie arcul de cerc care intersectează paralela din v la urma $\bar{P}$, în punctul v_1 . arcul de cerc cu raza vv_1 intersectează linia de ordine din v , în punctul v' care se unește cu P_x , obținându-se urma verticală $\bar{P}'$ a planului P . Din h ca centru, cu raza hM_0 , se descrie arcul de cerc până intersectează dreapta hv_1 în punctul m_1 . În m_1 se trasează paralela la urma orizontală $\bar{P}$, care intersectează proiecția orizontală d , în punctul m , care reprezintă proiecția orizontală a punctului M . Proiecția verticală d' este situată pe proiecția verticală d' a liniei de cea mai mare pantă.

Idei de reținut

- Rabaterea unui plan din spațiu pe unul din planele de proiecție este rotația planului în jurul unei axe de rabatere (care poate fi o urmă a planului sau o dreaptă remarcabilă a lui) până se suprapune pe planul de proiecție sau devine paralel cu acesta ;
- Rabaterea unui punct dintr-un plan, pe planul orizontal de proiecție, se află se află pe perpendiculara dusă din proiecția orizontală a punctului pe axa de rabatere;
- Rabaterea unui punct dintr-un plan, pe planul vertical de proiecție, se află pe perpendiculara dusă din proiecția verticală a punctului pe urma verticală a planului;
- Planele proiectante față de planele de proiecție, rabătute pe unul din planele de proiecție, au unghiul dintre urme de 90° ;
- Punctele de pe axa de rabatere sunt propriile lor rabătute.

• Probleme rezolvate

1. Fie triunghiul ABC definit de punctele: $\dot{A}(50,5,21)$, $\dot{B}(31,20,22)$, $\dot{C}(11,10,23)$ situat în planul P dat prin urme: $\dot{P}_x(110,0,0)$, $\dot{P}_y(0,40,0)$, $\dot{P}_z(0,0,45)$. Să se rabată triunghiul pe planul orizontal de proiecție (fig. 1).

Rezolvare

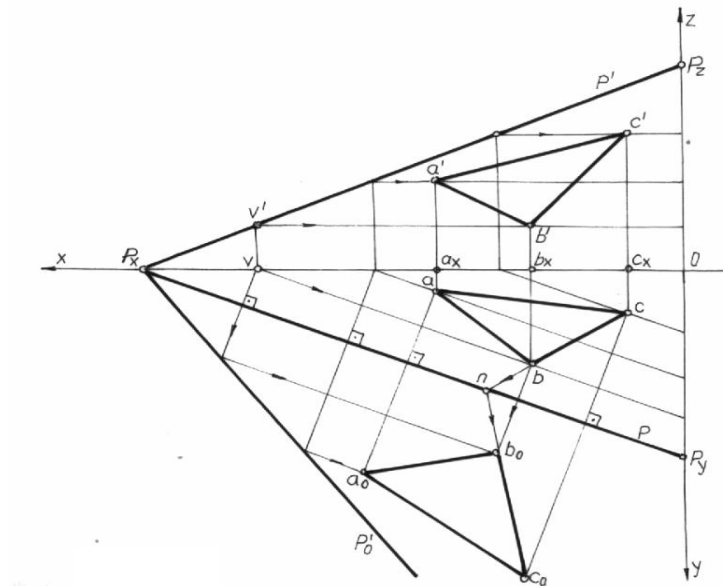


Fig. 1

Se consideră urma P ca axă de rabatere. Cu ajutorul unui punct oarecare (v, v') de pe urma verticală $\overline{P'}$ a planului, se rabate această urmă în $\overline{P'_0}$, pe planul orizontal de proiecție. Se rabat totodată și orizontalele care trec prin (a, a') și (b, b'), pe care se obțin rabaterile a_0 și b_0 , ducând din a și b linii de ordine, perpendiculare pe axa de rabatere $\overline{P}$. Rabaterea c_0 a punctului (c, c') se poate determina similar. Rabaterea $a_0b_0c_0$ reprezintă adevărata mărime a triunghiului.

2. Să se construiască proiecțiile cercului conținut de planul P , fiind dat în poziție rabătuță (fig.2).

Rezolvare

Prin centrul cercului în poziție rabătuță, se trasează diametrul A_0B_0 , paralel cu urma orizontală a planului, care va determina axa mare a elipsei în proiecție orizontală.

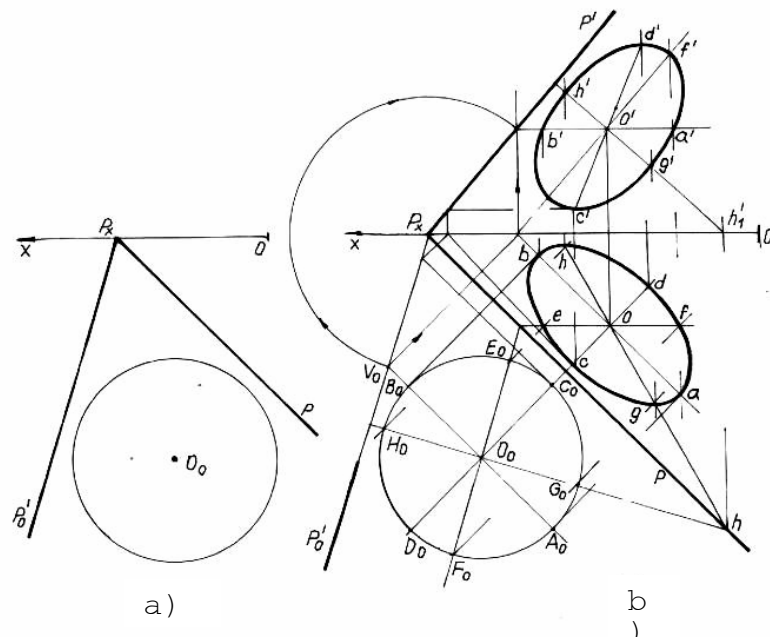


Fig.2

Utilizând urma verticală rabătuță V_0 , se determină urma verticală a planului. Diametrul C_0D_0 determină axa mică a elipsei în proiecție orizontală. Pentru a determina axa mare a elipsei în proiecție verticală, se consideră diametrul E_0F_0 paralel cu urma verticală rabătuță P_0' iar pentru a determina axa mică a elipsei în proiecție verticală, se consideră diametrul C_0H_0 perpendicular

pe P_{v0} . Ridicând rabaterea și construind proiecțiile acestor puncte, prin unirea lor se obțin elipsele care reprezintă proiecțiile cercului pe planele de proiecție.

• Probleme propuse spre rezolvare

3 Să se determine adevărata mărime a distanței de la punctul M la planul P. Se dau: $\dot{M}(90,30,40)$ și planul P prin punctul $P_x(70,0,0)$, $\dot{A}(40,0,50)$, $\dot{B}(20,20,0)$

4 Să se determine proiecțiile înălțimilor unui triunghi oarecare definit prin proiecțiile punctelor $A(a,a')$; $B(b,b')$; și $C(c,c')$.

5 Se dau : planul Q definit de $\dot{H}(20,105,0)$, $\dot{V}(130,0,35)$, $Q_x(160,0,0)$ și punctele $A(100, y_A, 70)$, $B(60, y_B, 90)$, $C(40, 60, z_C)$, $D(85, 45, z_D)$. Să se determine adevărata mărime a patrulaterului ABCD, conținut în planul Q.

6 Să se determine adevărata mărime a unghiului dintre dreptele concurente $D(d, d')$ și $\Delta(\delta, \delta')$. Dreapta D este dată de punctele $A(90, 30, 10)$ și $B(60, 10, 30)$ iar dreapta Δ este dată prin punctele $C(20, 35, 15)$ și $B(60, 10, 30)$.

7 . Să se găsească proiecțiile unui pătrat de latură 25 mm, situat într-un plan P, a cărui urmă verticală face cu axa Ox un unghi de 40° , abscisa punctului P_x fiind de 120 mm. Centrul pătratului este punctul $M(60, 25, 30)$, iar o diagonală a sa este linia de cea mai mare pantă a planului față de planul orizontal de proiecție.

Cap 5. Poliedre

- Poliedrele – corpuri mărginite de fețe plane - se reprezintă, în geometria descriptivă, prin proiecțiile lor pe două sau trei plane de proiecție. Proiecțiile lor se obțin fie prin proiectarea vârfurilor poliedrului fie prin proiectarea muchiilor pe planele de proiecție ale sistemului de referință ales. Criterii de vizibilitate stabilesc muchiile vizibile sau invizibile pentru fiecare proiecție în parte.

Secțiunile plane în poliedre se determină fie prin intersectarea fețelor poliedrului cu planul de secțiune, fie prin intersectarea muchiilor poliedrului cu planul de secțiune, obținându-se vârfurile poligonului secțiune și din unirea cărora se obțin proiecțiile secțiunii.

Punctele de intersecție dintre o dreaptă și un poliedru se determină prin metoda planului auxiliar, luat prin dreaptă.

- **Obiective**

- Să determine proiecțiile unui poliedru pe două sau trei plane de proiecție când sunt date coordonatele vârfurilor poliedrului;
- Să determine proiecțiile unui poliedru când se dau poziția bazei, orientarea muchiilor și înălțimea poliedrului;
- Să stabilească vizibilitatea muchiilor în epura unui poliedru;
- Să construiască epura secțiunii făcută de un plan oarecare într-un poliedru;
- Să construiască epura secțiunii făcută în poliedru de un plan proiectant față de planele de proiecție;
- Să stabilească vizibilitatea laturilor poligonului secțiune;
- Să determine punctele de intersecție dintre un poliedru și o dreaptă;
- Să determine adevărata mărime a poligonului secțiune;
- Să determine adevărata mărime a segmentului cuprins între punctele de intrare și ieșire din poliedru.

5.1. Definiții

Se numește poliedru corpul geometric mărginit de fețe plane. Fețele sunt poligoane. Intersecția a două fețe este o muchie a poliedrului. Intersecția a trei sau mai multe fețe formează un vârf.

Un poliedru este convex dacă nici unul din planele fețelor nu-l taie și este concav în caz contrar. O dreaptă nu întâlnește un poliedru convex în mai mult de două puncte.

Se numește poliedru regulat, poliedrul ale cărui fețe sunt poligoane regulate, cu un același număr de laturi și ale cărui unghiuri diedre și poliedre sunt egale între ele.

5.2. Reprezentarea poliedrelor

Pentru reprezentarea unui poliedru, se proiectează, în general, vârfurile, muchiile și fețele care delimitează poliedrul respectiv (fig. 89).

Se consideră prisma triunghiulară (fig. 89), având baza $A_1B_1C_1$. se proiectează vârfurile prisme pe cele două plane de proiecție și prin unirea proiecțiilor de același nume le vârfurilor se obțin proiecțiile prisme.

Se observă că fiecare proiecție conține o serie de linii exterioare fiecărei figuri, care alcătuiesc conturul aparent al proiecției respective. Poligonul $a_1'b_1'a_1$ din figura 89 b se numește conturul aparent orizontal, iar poligonul $a'a_1'c_1'c'a'$, conturul aparent vertical.

Dacă se consideră corpurile geometrice ca fiind netransparente, atunci în fiecare proiecție, o serie de elemente vor fi vizibile și se trasează cu linie continuă groasă, iar altele vor fi acoperite și se trasează cu linie întreruptă subțire.

Următoarele criterii pentru a distinge părțile vizibile sunt evidente:

1. Conturul aparent este vizibil
2. O față ce conține un punct vizibil este vizibilă, afară de cazul când acel punct aparține conturului aparent
3. Dacă proiecțiile a două muchii care nu se taie în spațiu sunt concurente în interiorul conturului, în general una este vizibilă, iar cealaltă invizibilă.
4. Dacă două fețe se taie după o muchie ce aparține conturului aparent, una este vizibilă, iar alta invizibilă. Sunt însă amândouă vizibile sau invizibile dacă ele se taie după o muchie ce nu aparține conturului aparent, iar muchia este vizibilă sau invizibilă.
5. Dacă un vârf este proiectat în interiorul conturului aparent, muchiile ce se întâlnesc în acest vârf sunt toate vizibile sau toate invizibile, după cum vârful este vizibil sau invizibil.

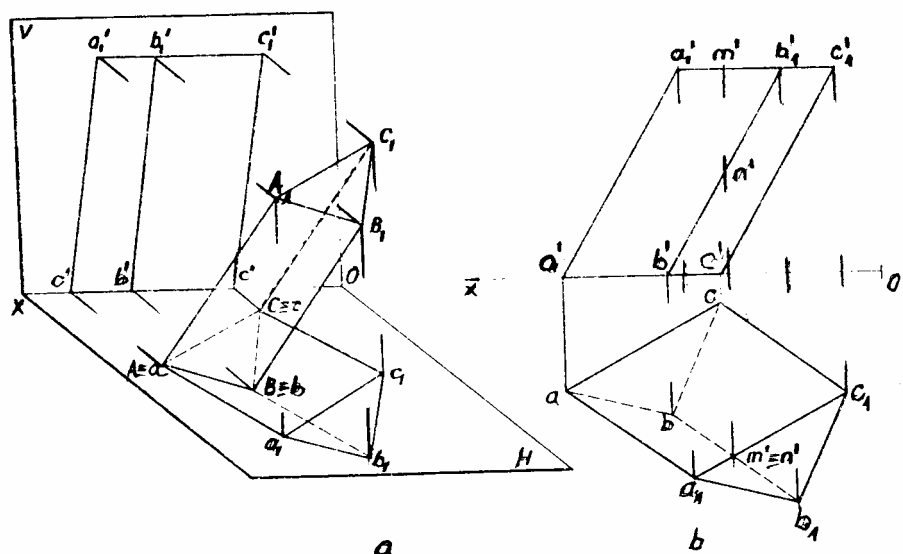


Fig. 89

Observație:

Dacă două puncte au aceeași proiecție orizontală, acela este vizibil în proiecția orizontală care are cota mai mare, iar dacă au aceeași proiecție verticală, punctul vizibil pentru proiecția verticală este acela cu depărtarea cea mai mare.

5.3. Punct situat pe suprafața unui poliedru

Fie M dat prin proiecția sa orizontală m , situat pe fața AEB a octaedrului ABCDEF. Deoarece un punct se găsește într-un plan dacă proiecțiile lui se găsesc pe proiecțiile omonime ale unei drepte conținută în plan, punctul M trebuie să se găsească pe o dreaptă conținută în planul feței AEB.

Deci, pentru a construi proiecția verticală m' a punctului M, se duce în planul feței AEB o dreaptă oarecare ($rq, r'q'$) a cărei proiecție rq trece prin m .

Proiecția verticală m' a punctului se găsește pe proiecția verticală $r'q'$ a dreptei considerate.

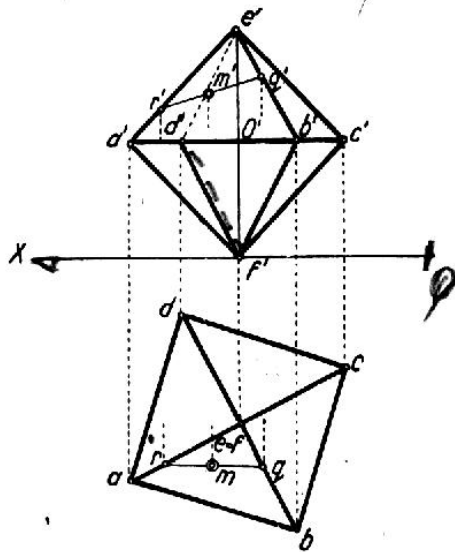


Fig. 90

5.4. Secțiuni plane în poliedre

Secțiunea plană într-un poliedru convex este un poligon convex.

Se poate construi secțiunea făcută cu un plan într-un poliedru, luându-se punctele în care muchiile poliedrului intersectează planul de secțiune, sau dreptele de intersecție dintre fețele poliedrului și acest plan. Deci, o secțiune într-un poliedru se poate obține cu ajutorul vârfurilor sau cu al laturilor. Problema secțiunii plane se reduce la problema intersecției dintre un plan și o dreaptă, sau la intersecția a două plane.

Se vor considera secțiuni plane în poliedre prin plane proiectante sau prin plane oarecare.

a) Secțiuni prin plane proiectante

- Să se construiască secțiunea plană, printr-un plan de capăt, într-o piramidă patrulateră SABCD, situată cu baza în planul orizontal de proiecție și să se găsească adevărata mărime a secțiunii.

Fie planul PP' de capăt dat (fig. 91). Secțiunea în piramidă efectuată cu acest plan apare în proiecția verticală total deformată și așternută pe urma verticală P' a planului după segmentul $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$. Proiecția orizontală $\alpha\beta\gamma\delta$ a secțiunii se obține coborând liniile de ordine până la proiecțiile orizontale ale muchiilor respective. Adevărata mărime $\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0$ a secțiunii se obține prin rabaterea planului P pe planul orizontal (sau vertical) de proiecție.

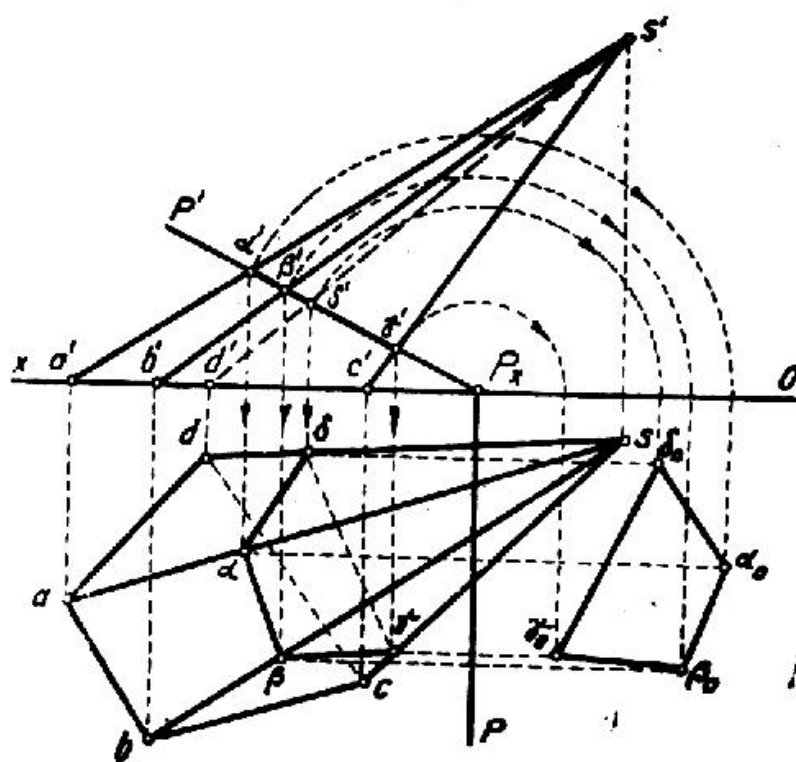


Fig. 91

Să se determine adevărata mărime a secțiunii plane într-o prismă triunghiulară oblică, situată cu baza ABC în planul orizontal de proiecție, printr-un plan vertical dat prin urme.

Fie P și P' urmele planului dat (fig. 92). Proiecția orizontală a secțiunii este segmentul $\alpha\beta\gamma$, așternut pe urma orizontală P a planului. Proiecția verticală a secțiunii este $\alpha'\beta'\gamma'$. Adevărata mărime $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ a secțiunii a fost găsită prin rabaterea planului vertical pe planul orizontal de proiecție.

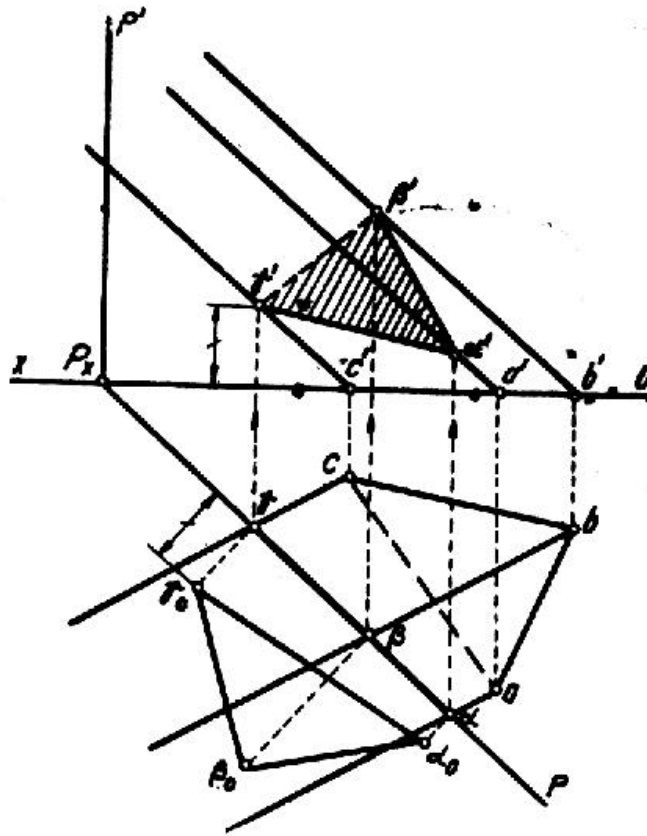


Fig. 92

- Să se determine adevărata mărime a secțiunii plane efectuată cu un plan de capăt PP' într-un tetraedru oarecare $SABC$.

În figura 93 este reprezentat în două proiecții un tetraedru oarecare $SABC$.

Proiecția verticală a secțiunii este segmentul $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ așternut pe urma verticală P' a planului secant. Proiecția orizontală a secțiunii este $\alpha\beta\gamma\delta$, iar adevărata mărime $\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0$ a secțiunii se poate obține printr-o rabatere a planului proiectant pe unul din planele de proiecție.

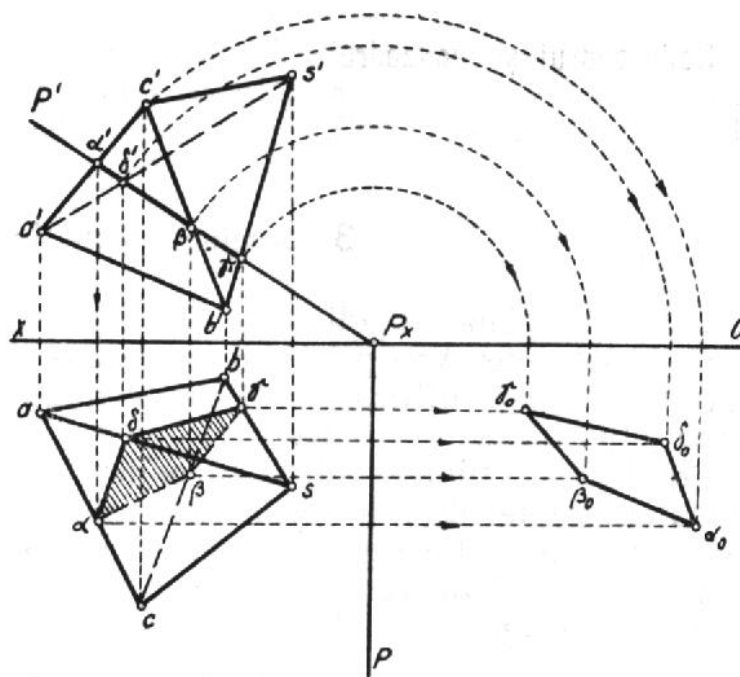


Fig. 93

- Să se construiască secțiunea plană într-o piramidă triunghiulară oblică $SABC$, cu baza în planul orizontal de proiecție, printr-un plan P care trece prin linia de pământ și punctul $M(mm')$.

Datorită faptului că planul P este proiectant față de planul lateral de proiecție, prisma $SABC$ va fi reprezentată în trei proiecții (fig.94). Fie $s''a''b''c''$ proiecția laterală a piramidei și P'' urma laterală a planului secant, care se determină unind O cu m'' (fig. 94). Planul secant fiind proiectant față de planul lateral de proiecție, secțiunea apare pe planul lateral de proiecție total deformată și așternută pe urma P'' a planului după segmentul $\alpha''\beta''\gamma''$. Revenind în proiecția orizontală și verticală se obține secțiunea $(\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma')$ căutată.

Adevărata mărime a secțiunii se poate obține fie prin rabaterea planului P pe unul din planele de proiecție, fie observând că toate punctele secțiunii au același raport între cotă și depărtare.

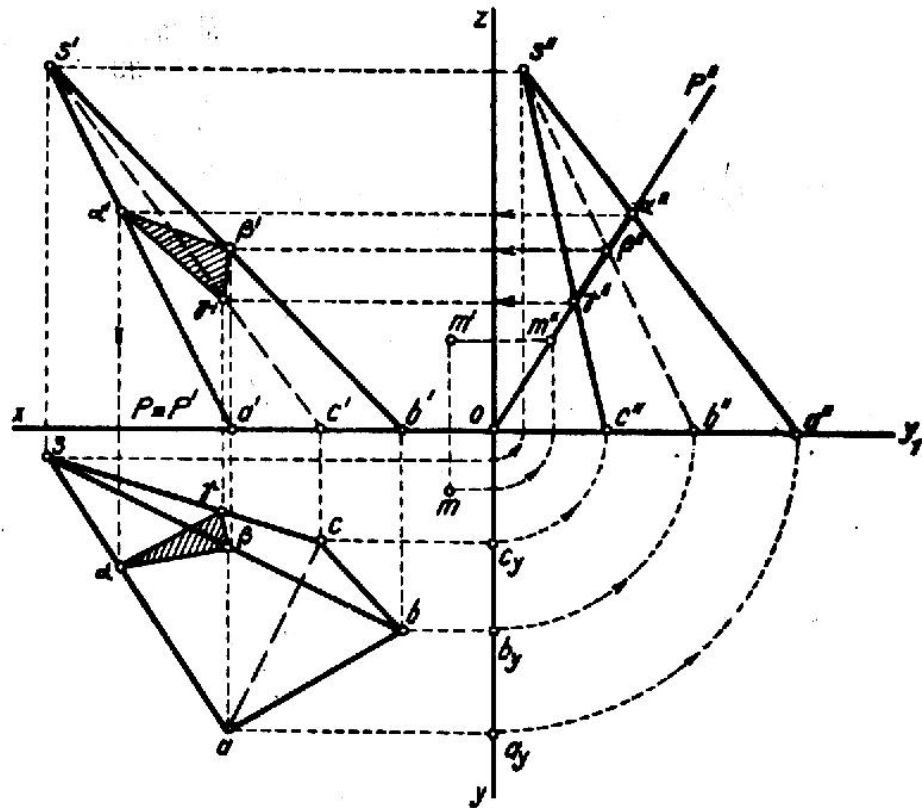


Fig. 94

• Să se construiască secțiunea plană într-o prismă patrulateră oblică, cu baza ABCD situată în planul orizontal de proiecție, printr-un plan P paralel cu linia de pământ.

Prisma $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ va fi reprezentată în 3 proiecții, planul P fiind proiectant față de planul lateral de proiecție (fig. 95). Proiecția laterală a secțiunii $\alpha'' \beta'' \gamma'' \delta''$ este total deformată și așternută pe urma laterală P'' a planului secant. Celelalte două proiecții ale secțiunii sunt $\alpha \beta \gamma \delta$ și $\alpha' \beta' \gamma' \delta'$.

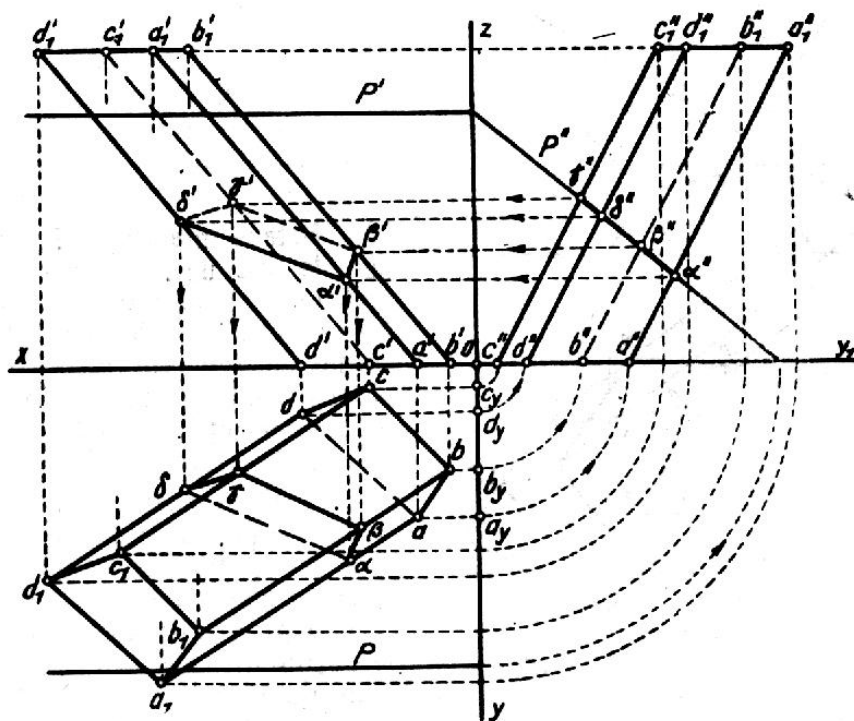


Fig. 95

b) Metoda intersecției muchiilor cu planul de secțiune

Să se construiască secțiunea plană într-o prismă triunghiulară oblică, cu baza în planul orizontal de proiecție printr-un plan P oarecare dat prin urme, utilizând metoda intersecțiilor muchiilor prisme cu planul de secțiune și să se găsească adevărata mărime a secțiunii.

Se determină punctele în care fiecare muchie a prisme intersectează planul de secțiune (fig. 96). Astfel, planul de capăt dus prin muchia A taie planul P după dreapta $(hv, h'v')$. Rezultă punctul (α, α') , luând intersecția dintre hv și proiecția orizontală a muchiei A . Analog se determină punctele (β, β') și (γ, γ') . Pentru a obține adevărata mărime $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ a secțiunii, se rabate în β_0 , pe planul orizontal de proiecție punctul (β, β') , cu ajutorul orizontalei $(\beta k, \beta'k')$ și se ține seama că punctele m și n sunt propriilor lor rabătute.

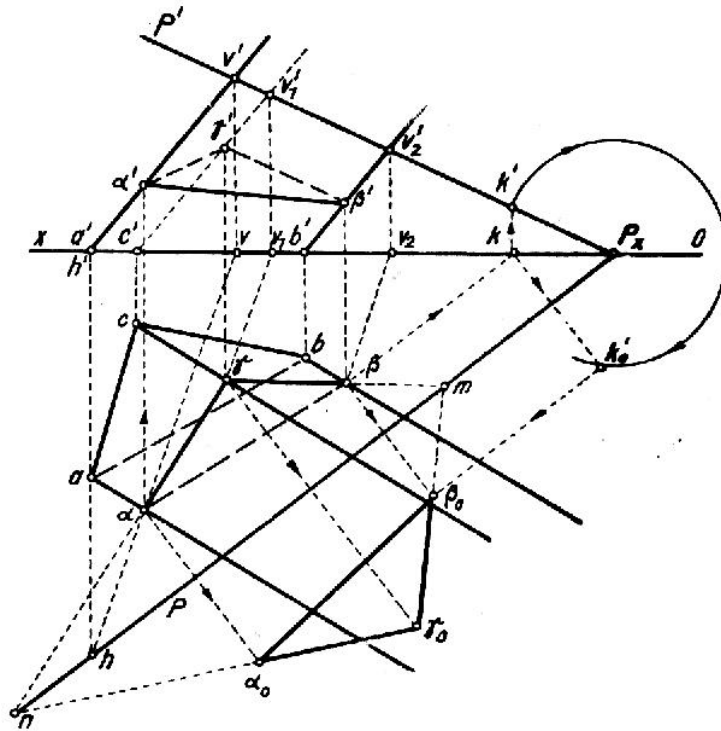


Fig. 96

Metoda intersecției fețelor cu planul de secțiune. Să se construiască secțiunea plană într-o prismă patrulateră oblică, cu baza în planul orizontal de proiecție, printr-un plan P oarecare dat prin urme, utilizând metoda intersecțiilor fețelor prisme.

Fie $ABCD$ prismă patrulateră oblică nelimitată dată (fig. 97). Proiecția orizontală ab reprezintă o porțiune orizontală a feței AB . Prelungind ab până la intersecția cu urma P , se obține h_1 care este un punct comun planului P și planul feței AB . Pentru a obține un al doilea punct e al dreptei de intersecție dintre cele două plane, se folosește planul arbitrar de nivel H' , care dă în planul P orizontala (g, g') iar în planul feței AB orizontala (g_1, g'_1) . Această orizontală (g_1, g'_1) trece prin punctul (i, i') în care muchia B întâlnește H' și este paralelă cu ab . Din intersecția h_1m a celor două plane se reține doar segmentul $\alpha\beta$. Analog, din intersecția h_2n a planelor P și feței CD se reține segmentul $\gamma\delta$. Proiecțiile secțiunii sunt astfel $(\alpha\beta\gamma\delta, \alpha'\beta'\gamma'\delta')$.

a) Intersecția dintre o dreaptă și o prismă

Să se determine proiecțiile punctelor de intersecție dintre o dreaptă $D(d, d')$ și o prismă patrulateră oblică $ABCE$, situată cu baza în planul orizontal de proiecție.

Fie $S(s, s')$ un punct arbitrar de pe dreapta $D(d, d')$ prin care se duce paralela $\Delta(\delta, \delta')$ la muchiile prisme (fig. 98).

Dreptele concurente D și Δ determină un plan paralel cu muchiile prisme, a cărui urmă orizontală P se obține unind h cu k . Acest plan secționează prisma după dreptele paralele cu muchiile prisme, drepte ce au urmele orizontale 1 și 2. Ele întâlnesc dreapta D în punctele $M(m, m')$ și $N(n, n')$ care sunt totodată punctele de intersecție dintre dreapta $D(d, d')$ și prismă.

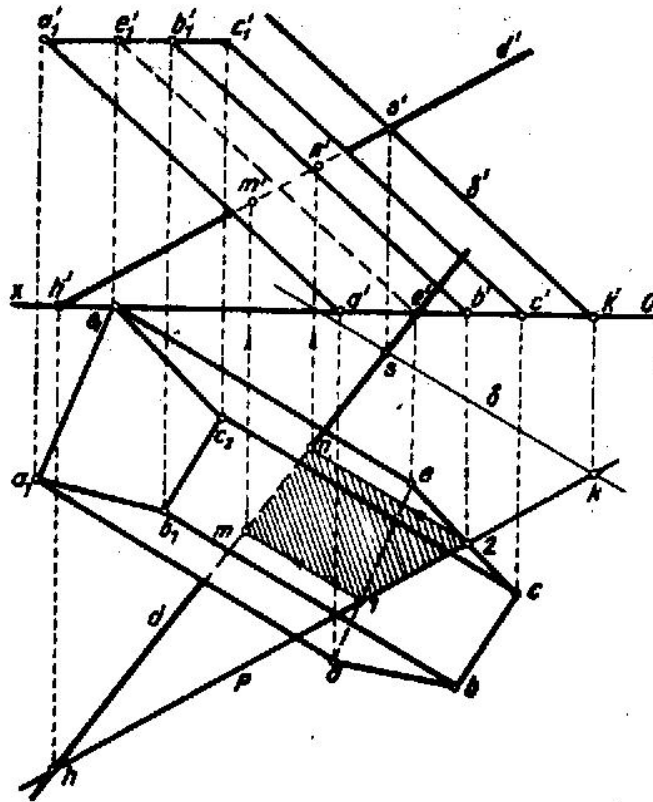


Fig. 98

b) Intersecția dintre o dreaptă și o piramidă

Să se determine proiecțiile punctelor de intersecție dintre o dreaptă $D(d,d')$ și o piramidă triunghiulară oblică $SABC$, cu baza situată în planul orizontal de proiecție.

Se alege un punct oarecare $E(e,e')$ pe dreapta $D(d,d')$ și se duce dreapta $\Delta(\delta,\delta')$ prin acest punct și prin vârful $S(s,s')$ al piramidei (fig.99). Planul P determinat de aceste două drepte concurente D și Δ secționează piramida după triunghiul $(s12,s'1'2')$, ale cărui laturi $s1$ și $s2$ intersectează dreapta $\bar{D}$ în punctele $M(m,m')$ și $N(n,n')$.

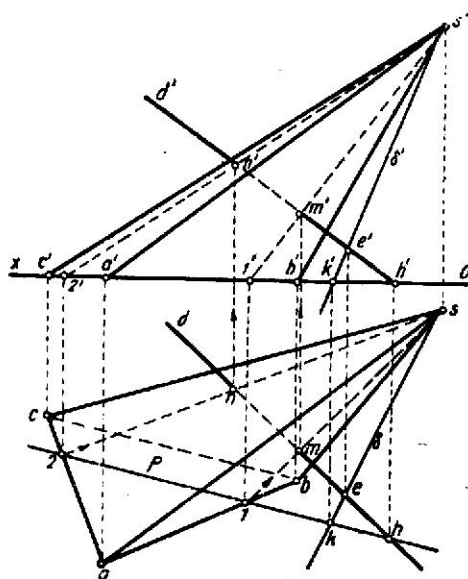


Fig. 99

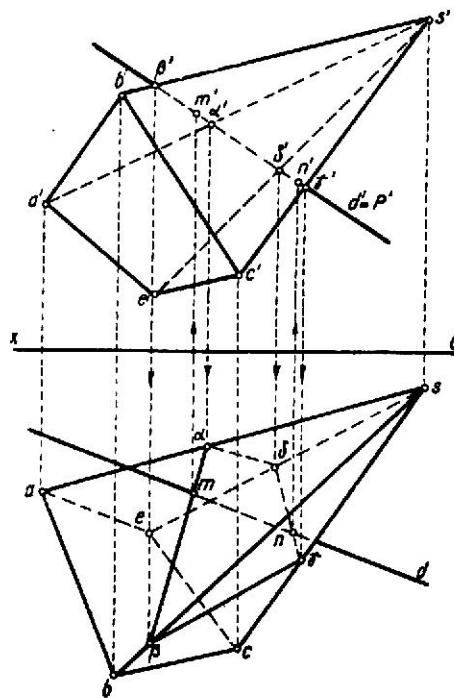


Fig. 100

c) **Metoda planelor proiectante.** Să se determine proiecțiile punctelor de intersecție dintre o dreaptă și o piramidă patrulateră oblică, cu baza situată într-un plan oarecare.

Fie dreapta $D(d,d')$ dreapta și $SABCE$ piramida (fig.100). Planul de capăt P' dus prin dreapta D secționează piramida după patrulaterul $(\alpha\beta\gamma\delta,\alpha'\beta'\gamma'\delta')$ ale cărui laturi intersectează dreapta $D(d,d')$ în punctele $M(m,m')$ și $N(n,n')$.

Idei de reținut

- Proiecțiile unui poliedru se obțin proiectând vârfurile poliedrului pe fiecare din planele de proiecție ale reperului ales și apoi unind proiecțiile de același nume ale vârfurilor;
- Poligonul care delimitează o proiecție se numește conturul proiecției și este diferit pe fiecare plan de proiecție în parte;
- Conturul proiecțiilor este întotdeauna vizibil;
- Muchiile invizibile pe un plan de proiecție, pot fi vizibile pe alt plan de proiecție;
- Pentru obținerea secțiunii plane într-un poliedru se intersectează pe rând, fiecare muchie în parte cu planul de secțiune;
- La obținerea epurei punctelor de intersecție dintre o dreaptă și un poliedru se utilizează un plan auxiliar, plan proiectant sau plan paralel cu muchiile poliedrului, luat prin dreapta de intersecție dată;
- Rabaterea efectuată pentru a afla adevărata mărime a poligonului secțiune se realizează pe partea din planul de proiecție mai liberă, urmărind o imagine mai clară.

• Probleme rezolvate

1. Să se reprezinte o prismă oblică a cărei bază este un poligon oarecare cu cinci laturi $ABCDE$ ($abcde, a'b'c'd'e'$), situat în $[H]$ (fig. 1); muchiile laterale se iau după o direcție arbitrara, iar a doua bază situată într-un plan de nivel H_1

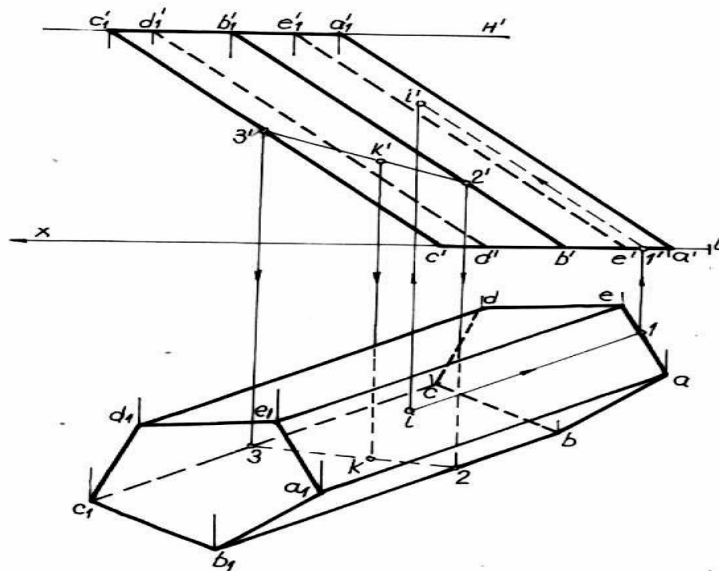


Fig.1

Rezolvare: La acest poliedru apar muchii care nu se vad, trasate cu linii întrerupte în ambele proiecții. Așa de exemplu, în proiecție orizontală, BC și CD , nu se vad, deci sunt trasate cu linii întrerupte. Punctele acestor muchii au cota zero, deci mai mica decât a oricăror puncte care aparțin prisme și sunt situate pe aceeași proiectanta față de planul H .

Apoi trebuie reținut că, dintr-un punct nevăzut, orice dreaptă care pleacă, este în primă instanță, nevăzută. De exemplu, din proiecția c se duce cu linie întreruptă proiecția muchiei CC_1 adică cc_1 . Celelalte muchii în proiecție orizontală sunt văzute în proiecție verticală, deoarece muchiile laterale sunt paralele și nu apar intersecții de muchii, așa ca în proiecție orizontală. Pentru a aplica regula vizibilității se poate trasa pe una din fețele laterale văzute o dreaptă care să intersecteze muchiile din interiorul conturului aparent, cum este, de exemplu, dreapta $\overline{II} - \overline{III}(2-3, 2'-3')$ pe fata BB_1C_1C , care intersectează proiecția verticală $d'd_1'$. Ducând din punctul de intersecție linie de ordine în proiecție orizontală, aceasta intersectează mai întâi proiecția dd_1 și apoi proiecția 2-3 (liniile de ordine și punctele de intersecție nu sunt figurate) și, deci, în proiecție verticală $d'd_1'$ trebuie trasată cu linie întreruptă, deoarece nu se vede, trecând printr-un punct nevăzut.

În continuare, considerând punctele I și K , care aparțin respectiv fețelor AA_1E_1E și BB_1C_1C , primul având dată proiecția orizontală i , iar al doilea – proiecția verticală k' , se vor găsi proiecțiile de nume contrar.

În cazul prismelor, uneori, este avantajos să se folosească drepte paralele cu muchiile laterale (fig. 1), prin proiecția orizontală i a punctului și prin intermediul punctului $1(1,1')$, ducându-se pe față AA_1E_1E , paralela la muchiile laterale ale prisme. Apoi, prin linie de ordine ridicată din proiecția orizontală i , pe proiecția verticală a dreptei, se găsește proiecția verticală i' a punctului. Se poate întrebuința și o dreaptă oarecare, când prin k' (fig. 6.1.) se duce proiecția $2'-3'$ a dreptei, care trebuie să aparțină feței BB_1C_1C . Găsind apoi proiecția orizontală a dreptei și ducând linie de ordine din k , la intersecție cu proiecția orizontală 2-3 se obține proiecția orizontală k a punctului. Urmărind săgețile și noțiunile cunoscute referitoare la vizibilitate, figura poate fi citită cu mai multe amănunte.

2. Să se construiască intersecția piramidei $SABCD$ cu planul vertical $[R]$ dat de punctele R_x și M . Se dau:

$\dot{S}(80,70,90), \dot{A}(50,20,0), \dot{B}(50,40,0), \dot{C}(30,50,0), \dot{D}(20,30,0), \dot{R}_x(90,0,0), \dot{M}(20,80,0)$
Se cere proiecția pe planul lateral $[W]$ a secțiunii.

Rezolvare: (fig.2) Planul R intersectează piramida astfel: $\overline{R} \cap sa \Rightarrow \dot{1}$, $\lambda l \cap s'a' \Rightarrow \dot{1}'$, analog se obține poligonul secțiunii $(1234) \subset [H]$, $(1'2'3'4') \subset [V]$. Punctele $(1''2''3''4'')$ au fost obținute utilizând proiecția pe planul lateral $[W]$ a piramidei și ducând linii de ordine din $1'2'3'4'$ până la proiecțiile laterale corespunzătoare ale muchiilor prisme. Vizibilitatea este redată în figura.

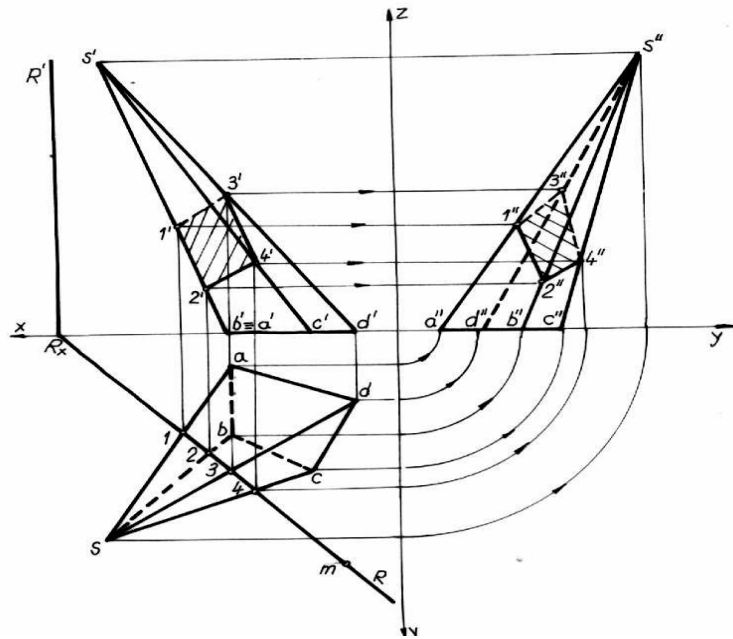


Fig.2.

3. Sa se determine punctele de intersecție dintre o dreaptă și o piramidă patrulaterală oblică, cu baza situată într-un plan oarecare (fig.3).

Rezolvare:

Fie dreapta $D(d, d')$ și $SABCE$, piramida (fig. 3). Planul de capăt $[\overline{P}]$ de urme $\overline{P}$ și $\overline{P}'$ dus prin dreapta D , secționează piramida după patrulaterul $(\alpha\beta\gamma\delta, \alpha'\beta'\gamma'\delta')$ ale cărui laturi intersectează dreapta $\overline{D}(d, d')$ în punctele $\dot{M}(m, m')$ și $\dot{N}(n, n')$.

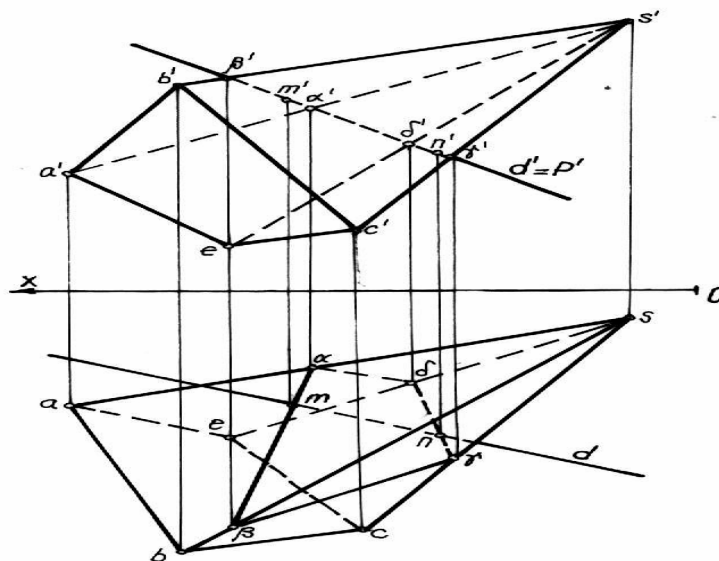


Fig 3

• Probleme propuse spre rezolvare

4. Sa se reprezinte în epură o prisma dreapta cu baza un pentagon oarecare situat într-un plan vertical. Să se construiască epura unui punct situat pe o față a prisme.

5. Să se construiască prisma oblică $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ cu baza (pentagon regulat) conținut în planul $[H]$. Se dau: latura pentagonului $40mm$ și înălțimea prisme $h=80mm$. În plan vertical muchiile $(AA_1.....EE_1)$ au înclinație 40° față de axa Ox , iar în plan orizontal înclinația este de 28° .

6. Fie piramida $SABC$ data prin: $\dot{A}(90,20,0), \dot{B}(70,50,0), \dot{C}(50,30,0)$ și vârful $\dot{S}(20,-50,80)$. Să se construiască epura secțiunii făcută în piramida de planul vertical de proiecție și a secțiunii făcută în piramida de un plan de nivel $\dot{N}$ de cota $z=10$.

7. Sa se construiască epura secțiunii făcute de planul P , determinat de $\dot{P}_x, T, K$, în piramida $SABC$. Se dau:
 $\dot{S}(95,25,55), \dot{A}(130,45,0), \dot{B}(90,7,0), \dot{C}(75,42,0), \dot{P}_x(15,0,0), T(15,0,15), \dot{K}(50,20,0)$

8. Să se construiască epura prisme patrulate dreapta dată prin: $\dot{A}(50,0,8)$, $\dot{B}(40,0,30)$, $\dot{C}(60,0,30)$, $\dot{D}(70,0,25)$, $\dot{A}_1(50,40,8)$. Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta $\Delta(\delta, \delta')$ data prin $\dot{H}(85,20,0)$ și $\dot{N}(27,20,27)$ și prin prisma reprezentată.

9. Să se construiască intersecția piramidei $SABCD$ cu dreapta EF și să se determine mărimea segmentului din dreapta, care traversează piramida: $\dot{S}(70,80,70)$, $\dot{A}(160,50,0)$, $\dot{B}(110,60,0)$, $\dot{C}(90,30,0)$, $\dot{D}(130,20,0)$, $\dot{E}(130,110,55)$, $\dot{F}(70,0,25)$

Cap 6. Suprafețe conice și cilindrice

- Conurile și cilindrii sunt corpuri create prin deplasarea unei drepte (generatoare), sprijinindu-se pe o curbă directoare, fie păstrând un punct fix, în cazul conurilor, fie rămânând paralelă cu o direcție dată în cazul cilindrilor. Ca și pentru poliedre se caută să se determine epura secțiunii făcută într-un con sau cilindru, de un plan de secțiune, care poate fi un plan oarecare sau un plan proiectant pe unul din planele de proiecție.

O dreaptă din spațiu poate străbate un con sau un cilindru, înțepând suprafața corpului în două puncte, pentru care se impune determinarea epurelor, după caz, în două sau trei proiecții.

- **Obiective**

- Să construiască epura unui con, date fiind coordonatele centrului bazei, raza cercului de bază, coordonatele vârfului conului;
- Să construiască epura unui cilindru când sunt date coordonatele centrele cercurilor (de bază și limită superioară) și raza cilindrului;
- Să determine epura unui punct pe suprafața laterală a unui con sau cilindru;
- Să determine epura secțiune făcută în con de un plan oarecare;
- Să determine epura secțiunii făcută într-un cilindru de un plan oarecare;
- Să determine secțiunea făcută de un plan particular (proiectant față de unul din planele de proiecție) într-un con sau un cilindru;
- Să determine punctele de intersecție dintre o dreaptă și un con sau cilindru;
- Să determine adevărata mărime a segmentului având extremități punctele de intersecție dintre corp și dreaptă.

6.1 Reprezentarea conurilor și cilindrilor

a) Conul

Conul este suprafața generată de o dreaptă mobilă care trece printr-un punct fix și se sprijină pe o curbă Γ .

Punctul fix V este vârful conului. Curba (Γ) pe care se sprijină dreapta mobilă se numește directoare. Dacă generatoarele se prelungesc în amândouă sensurile, suprafața se întinde de o parte și de alta a vârfului. Cele două părți astfel obținute constituie pânzele conului; ele formează o singură suprafață, iar vârful V este un punct singular (fig.101).

Poate fi directoare orice curbă. Dacă curba directoare este plană, i se dă uneori numele de bază. De obicei, conul poartă numele curbei directoare. Astfel se spune con circular, eliptic, hiperbolic etc., după cum curba directoare este un cerc, o elipsă etc.

Se numește con de revoluție sau de rotație suprafața născută de o dreaptă D ce se rotește în jurul unui ax XX' , cu care este concurentă (fig. 102).

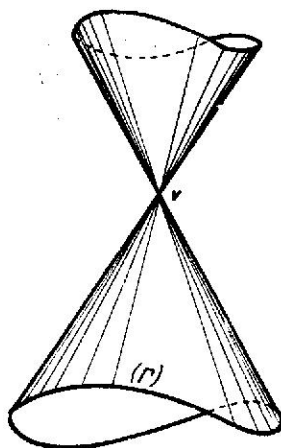


Fig. 101

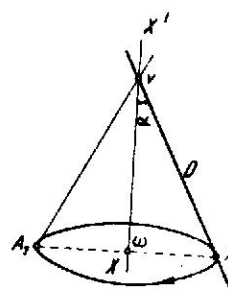


Fig. 102

Unghiul constant α pe care generatoarea D îl face cu axa se numește **unghiul conului**. Punctul de intersecție dintre dreaptă și axă este vârful conului. Toate punctele dreptei D descriu cercuri ale căror centre I se găsesc pe axă.

Dacă se secționează un con de revoluție prin două plane perpendiculare pe axa de rotație de aceeași parte a vârfului, suprafața cuprinsă între se numește trunchi de con de speța întâi. Dacă cele două plane se află de o parte și de alta a vârfului, trunchiul de con este de speța a doua.

Reprezentarea în epură. Un con se reprezintă în epură prin proiecțiile vârfului $V(v, v')$ și ale directoarei $\Gamma(\gamma, \gamma')$ (fig. 103).

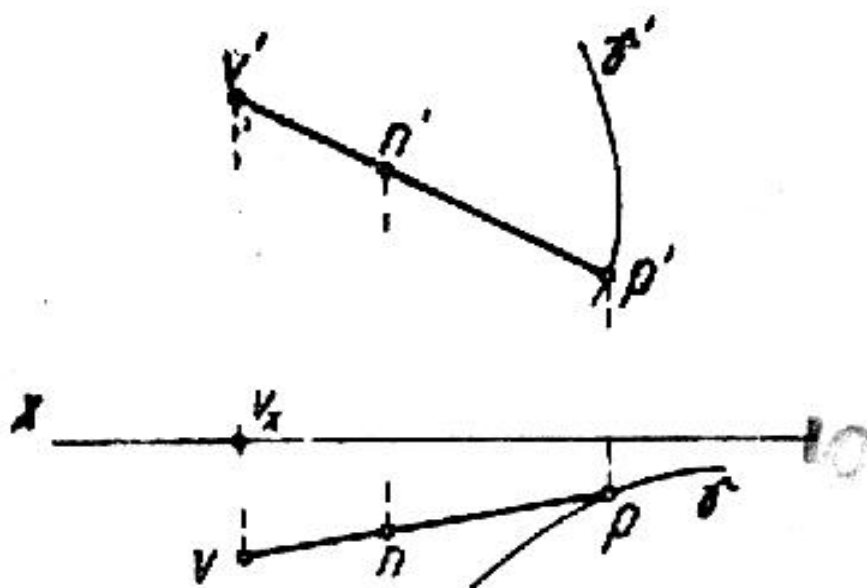


Fig. 103

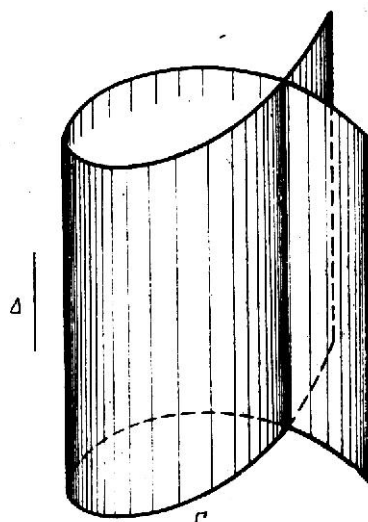


Fig. 105

Reprezentarea în epură (fig. 106).

Un cilindru se reprezintă în epură prin proiecțiile curbei directoare și ale direcției generatoarelor. Un punct oarecare $M(m, m')$ aparține suprafeței dacă se găsește pe una din generatoarele ei; proiecțiile m și m' ale punctului sunt situate pe proiecțiile corespunzătoare ale unei aceleiași generatoare

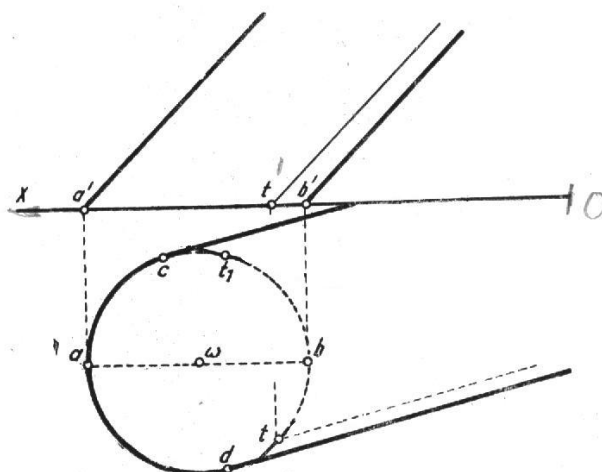


Fig. 106

6.2 Secțiuni plane în suprafețele conice și cilindrice

A. Secțiune plană în con

Teorema lui Dandelin. Secțiunea plană într-un con de rotație este elipsă, hiperbolă sau parabolă, după cum planul paralel cu planul secant, dus prin vârful conului nu secționează conul, îl secționează după două generatoare sau este tangent la con.

a) Secțiuni eliptice

- **Construcția secțiunii eliptice într-un con circular drept, a cărui bază (directoare) este situată în planul orizontal de proiecție**

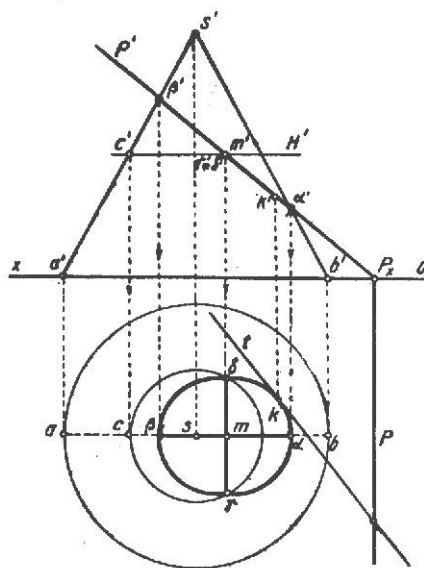


Fig. 107

Fie $S(s, s')$ vârful conului (fig. 107). Se alege ca plan de secțiune planul de capăt PP' , care întâlnește o singură pînză a conului. Secțiunea este o elipsă, a cărei proiecție verticală este segmentul $\alpha'\beta'$ așternut pe urma verticală P' . axele proiecției orizontale sunt $\alpha\beta$ și $\gamma\delta$. Centrul secțiunii este punctul (m, m') mijlocul segmentului $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$. Axa $\gamma\delta$ rezultă din intersecția dreptei de capăt ce se proiectează vertical în m' cu paralelul conului de rază sc obținut prin planul de nivel H' dus prin M .

• **Construcția secțiunii eliptice cu un plan oarecare, într-un con circular drept, a cărui directoare (bază) este sitată în planul orizontal de proiecție.**

Fie P și P' urmele planului de secțiune care este întâlnit în punctul (σ, σ') de axa verticală a conului (fig. 108). Axa mare a secțiunii este dirijată după linia de cea mai mare pantă a planului P față de planul orizontal de proiecție.

Extremitățile (γ, γ') și (δ, δ') ale acestei axe rezultă din intersecția dreptei $(h_1\sigma, h_1^p\sigma')$ cu generatoarele $(sc, s'c')$ și $(sd, s'd')$ ale conului. Centrul secțiunii este mijlocul (ω, ω') ale acestei axe. Extremitățile (μ, μ') și (γ, γ') ale axei mici a secțiunii se obțin din intersecția orizontalei $(\omega v, \omega'v')$ cu conul.

Punctele secțiunii situate pe conturul aparent vertical al conului sunt (α, α') și (β, β') și se obțin intersectând generatoarele de front ale conului cu planul de secțiune. Ramura vizibilă a curbei de secțiune în proiecția verticală este $\alpha'\gamma'\mu'\beta'$.

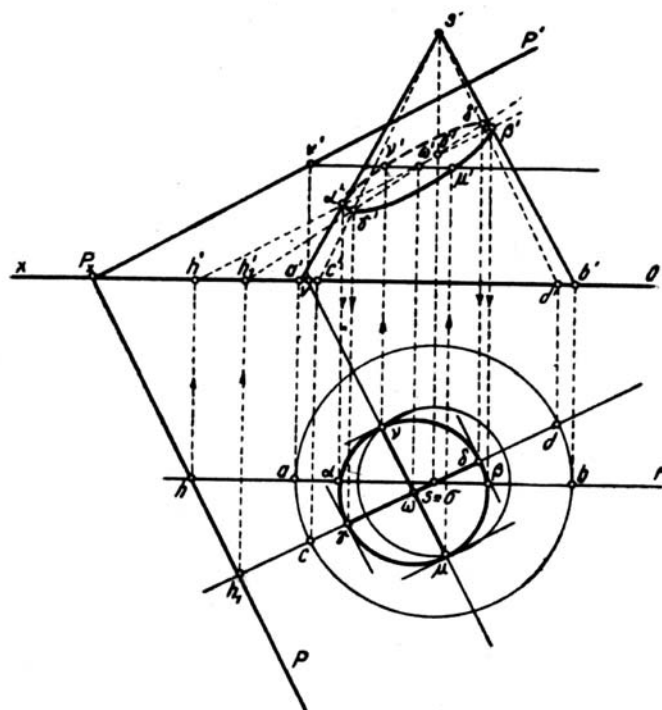


Fig. 108

- **Secțiunea cu un plan de capăt într-un con circular oblic**

Se consideră un con oblic cu vârful $S(s, s')$ și a căru directoare este un cerc situat în planul orizontal de proiecție.

Fie P și P' urmele planului secant (fig. 109).

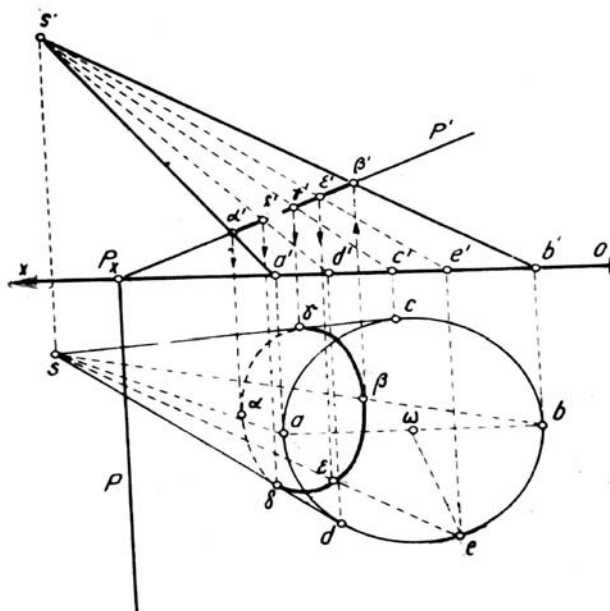


Fig. 109

Se intersectează planul de secțiune cu generatoarele de contur aparent orizontal și vertical ale conului. Proiecția verticală a secțiunii este total deformată și așternută pe urma verticală P' a planului. Proiecția orizontală a secțiunii este elipsa $\alpha\delta\epsilon\beta\alpha$.

b) Secțiune parabolică într-un con circular drept

Fie conul circular drept cu baza în planul orizontal de proiecție și planul de capăt cu urmele P și P' care secționează acest con (fig. 110).

În acest exemplu s-a ales planul de capăt paralel cu generatoarea de front $(sb, s'b')$ a conului. Secțiunea este o parabolă a cărei proiecție verticală este așternută pe urma verticală P' a planului. Vârful secțiunii este (α, α') , iar punctele situate pe generatoarele de profil ale conului sunt β și β_1 . Punctele γ și γ_1 ale secțiunii rezultă din intersecția dreptei de capăt (g, g') cu paralelul de rază sn obținut prin secționarea conului cu planul de nivel H_1' .

Alte puncte ale secțiunii sunt δ și δ_1 .

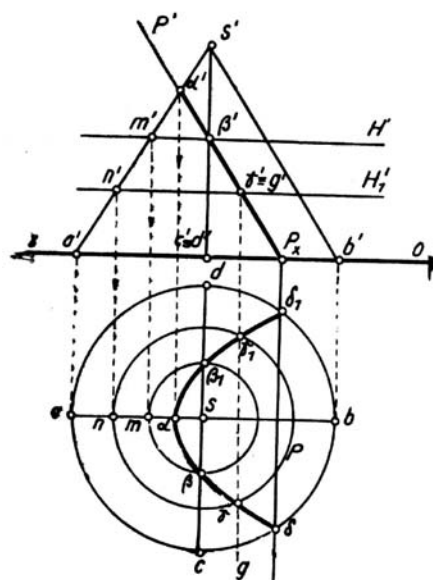


Fig. 110

c) Construcția secțiunii făcută de un plan oarecare într-un con circular oblic determinând punctele de intersecție ale generatoarelor cu planul secant

Fie un con circular oblic cu baza în planul orizontal de proiecție și vârful $S(s, s')$ și planul oarecare P secant (fig. 111).

Secțiunea se obține prin determinarea punctelor de intersecție dintre generatoarele conului și planul secant. Se alege un număr de 6...8 generatoare, repartizate cât mai uniforme pe suprafața conului care se trasează în ambele proiecții. Se determină punctele de intersecție cu planul de secțiune, utilizând plane auxiliare care conțin generatoarele. Considerând de exemplu planul Q prin generatoarea $SA(sa, s'a')$ se determină dreapta de intersecție cu planul P , $HV(hv, h'v')$, respectiv

punctul $A_1(a_1, a_1')$ în care generatoarea intersectează planul P. Procedând asemănător cu celelalte generatoare, se determină punctele $B_1(b_1, b_1')$... $I_1(i_1, i_1')$ care, prin unire, dau proiecțiile secțiunii.

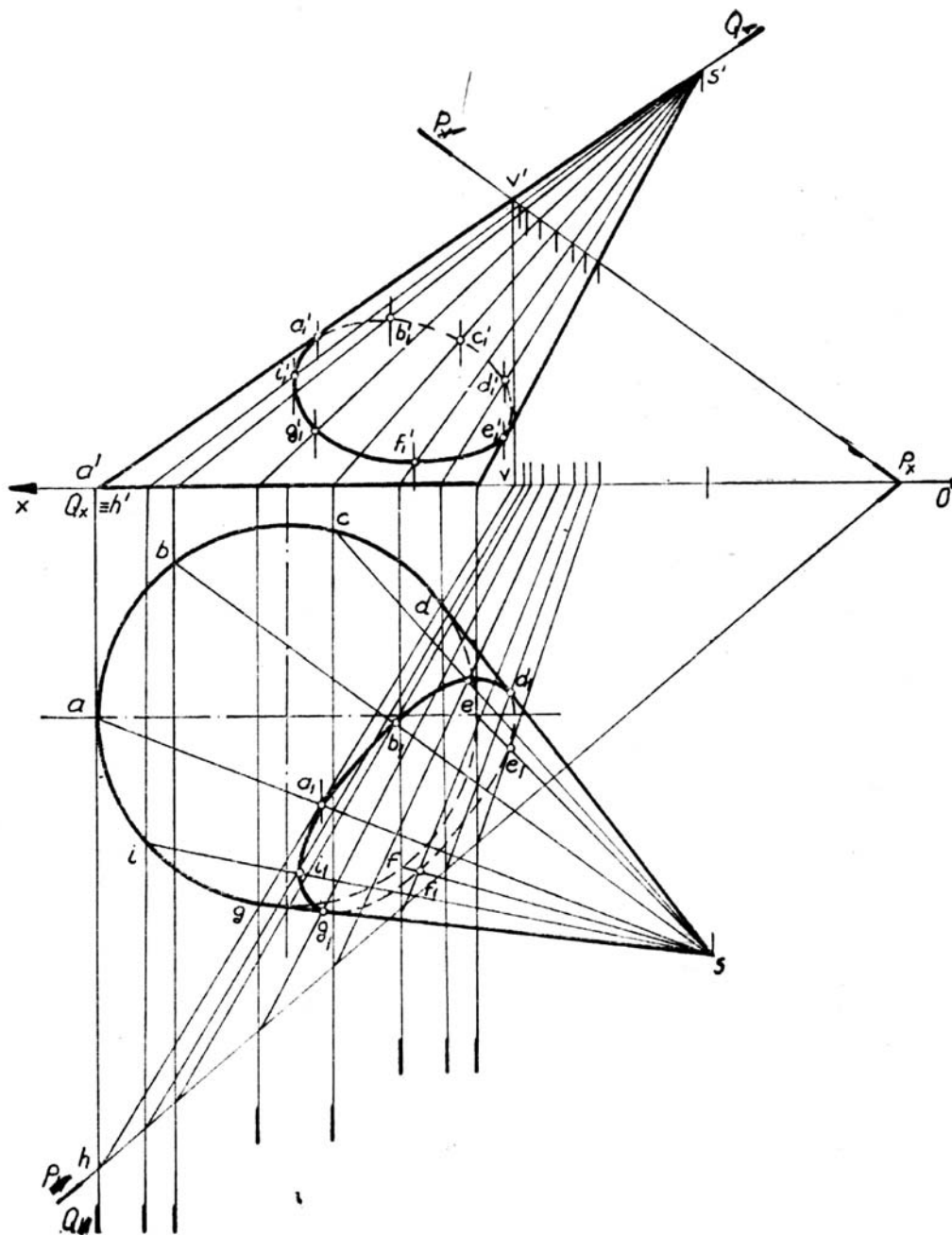


Fig. 111

B. Secțiuni plane în cilindru

1. Construirea secțiunii determinată de planul oarecare P pe suprafața unui cilindru circular oblic (fig.112).

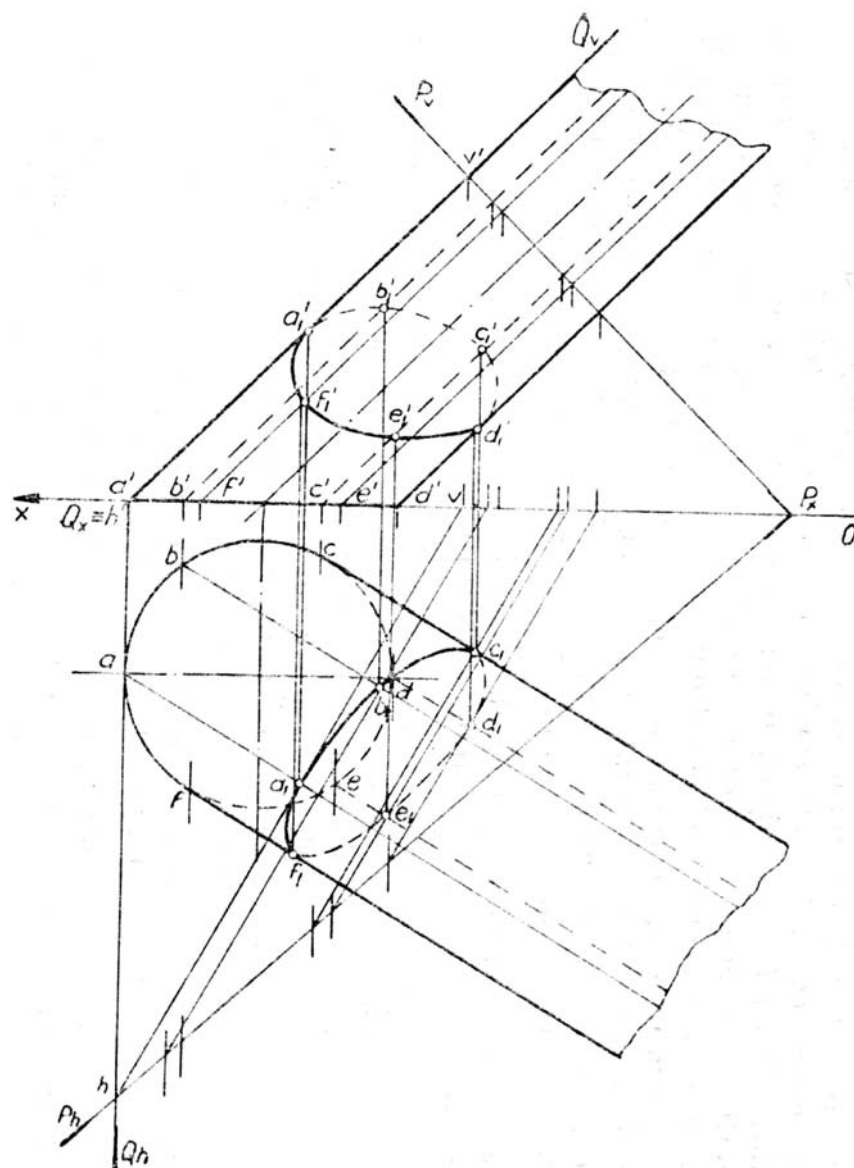


Fig. 112

Se determină punctele de intersecție dintre generatoarele cilindrului și planul P. Se consideră un număr suficient de generatoare, repartizate cât mai uniform pe suprafața cilindrului care se trasează fiecare în ambele proiecții. Folosind ca plane auxiliare care să conțină generatoare, plane de capăt, se determină punctele de intersecție dintre generatoare și planul P. Prin unirea punctelor obținute, se determină proiecțiile secțiunii.

2. Construirea secțiunii rezultate prin secționarea unui cilindru drept cu planul P, având urmele în prelungire (fig. 113)

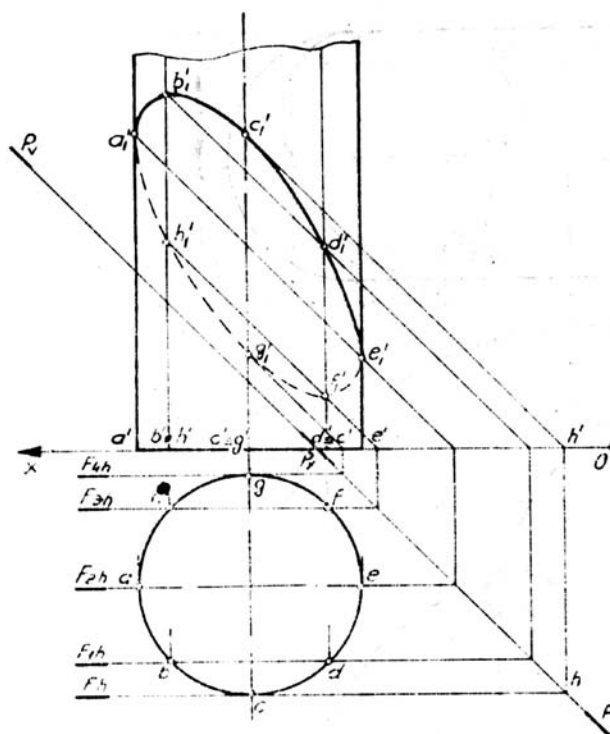


Fig. 113

Se determină punctele de intersecție dintre generatoare și planul P , utilizând ca plane auxiliare care să conțină generatoarele, plane frontale. Proiecția orizontală a secțiunii se confundă cu proiecția orizontală a cilindrului.

6.3 Intersecția dintre o dreaptă și o suprafață cilindro-conică

a) Intersecția dintre o dreaptă și un con.

Să se determine proiecțiile punctelor de intersecție dintre o dreaptă $D(d, d')$ și un con oblic a cărui directoare este un cerc situat în planul orizontal de proiecție.

Fie $S(s, s')$ vârful conului și (h, h') urma orizontală a dreptei D (fig. 114)

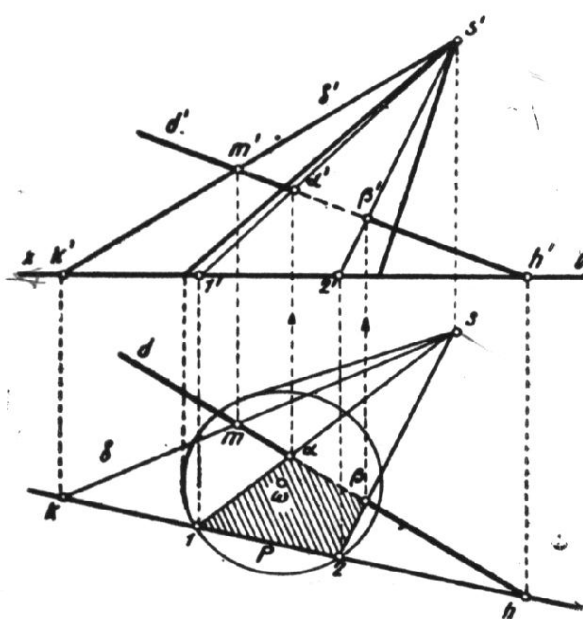


Fig. 114

Se alege un punct arbitrar $M(m, m')$ pe dreapta d și se duce dreapta $MS \equiv \Delta$, a cărei urmă orizontală este (k, k') . Dreptele D și Δ definesc planul P care secționează conul după generatoarele (s_1, s'_1) și (s_2, s'_2) . Aceste generatoare întâlnesc dreapta D în punctele (α, α') și (β, β') de intersecție căutate.

b) Intersecția dintre o dreaptă și un cilindru

Să se determine proiecțiile punctelor de intersecție dintre o dreaptă $D(d, d')$ și un cilindru, a cărui directoare este un cerc situat în planul orizontal de proiecție.

Se consideră un punct arbitrar $M(m, m')$ pe dreapta D , prin care se duce paralela $\Delta(\delta, \delta')$ la generatoarele cilindrului (fig. 115).

Planul P format de dreptele D și Δ secționează cilindrul după generatoarele care întâlnesc dreapta D în punctele de intersecție (α, α') și (β, β') căutate.

Dacă urma orizontală P nu întâlnește directoarea cilindrului, dreapta D nu intersectează acest cilindru.

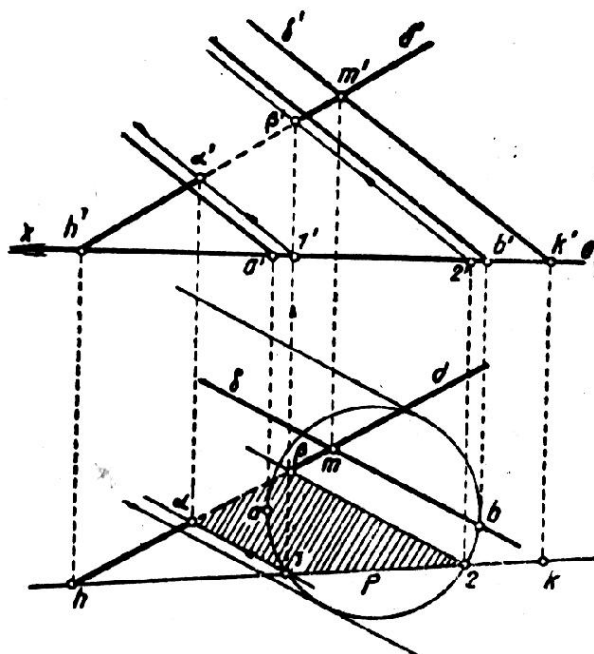


Fig. 115

Idei de reținut

- Conturul unei proiecții al unui con sau cilindru este alcătuit din proiecții de generatoare și proiecția corespunzătoare a curbei directoare;
- Imaginile corpului (con sau cilindru) sunt diferite pe fiecare plan de proiecție în parte;
- Secțiunea plană într-un con sau cilindru se obține intersectând planul de secțiune cu minim șase generatoare și apoi unind cu linie curbă proiecțiile punctelor determinate;
- Epura punctelor de intersecție dintre o dreaptă și un con sau cilindru se obține la intersecția dreptei cu conturul secțiunii făcută de un plan luat prin dreaptă (auxiliar). Planul auxiliar poate fi un plan proiectant față de planele de proiecție sau poate fi un plan ce trece prin vârful conului sau paralel cu generatoarele cilindrului.

• **Probleme rezolvate**

1. Se dă conul circular oblic cu baza situată în planul orizontal de proiecție, care are vârful $\dot{S}(5,30,70)$ și centrul bazei $\dot{C}_1(70,50,0)$ cu raza $r=40\text{mm}$.

Se dau punctele: $\dot{M}(30,30,z)$, $\dot{N}(60,y,25)$.

- Să se reprezinte conul și punctele M și N știind că acestea aparțin conului; se va utiliza și planul lateral de proiecție;
- Să se ia un punct T pe suprafața conului pornind de la proiecția lui laterală.

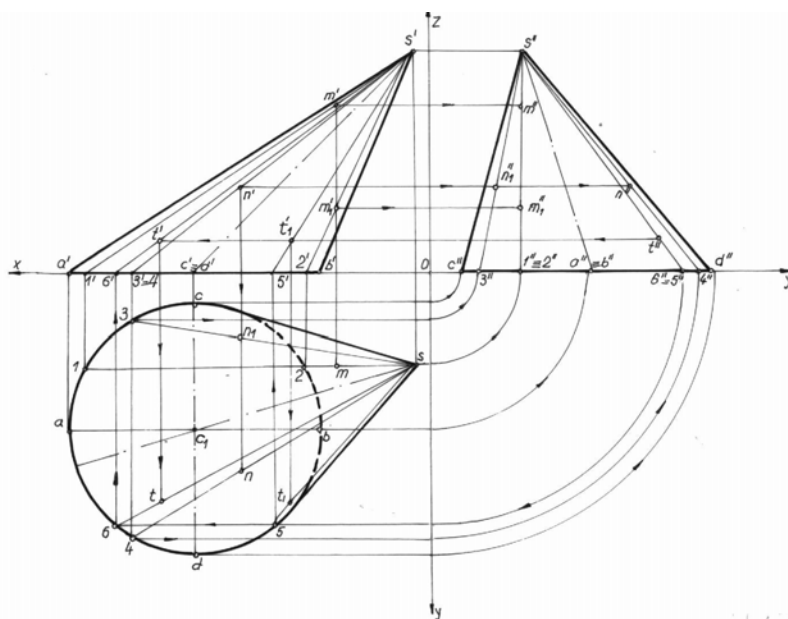


Fig. 1

Rezolvare:

S-au construit proiecțiile conului în planele H și V . Prin rabatare se obține proiecția laterală a acestuia (fig.1).

- Se cunoaște depărtarea punctului M și prin m se duce generatoarea s_1 , apoi se construiește proiecția verticală a muchiei s'_1 , apoi proiecția laterală s''_1 . Din m se duce linie de ordine până la s'_1 și se determină m' , din m' se duce linie de ordine perpendiculară pe Oz până la s''_1 și se obține proiecția laterală m'' . Dacă se pornește de la proiecția m se constată că există încă o generatoare (s_2) care conține pe m . Ca urmare se vor obține două proiecții verticale m' și m'_1 și două laterale m'' și m''_1 . Liniile de ordine dintre m' și m'' și m'_1 și m''_1 determină cotele $z = 52\text{mm}$ și $z_1 = 20\text{mm}$.

- Cunoscându-se cota punctului N , n' , se construiesc proiecțiile verticale ale generatoarelor $s'_3 \equiv s'_4$. Ducându-se linii de ordine din $3'$ și $4'$ până la proiecția orizontală a bazei se obțin punctele 3 și 4, respectiv generatoarele în proiecție orizontală s_3 și s_4 . Prin rabatare se construiesc și proiecțiile laterale ale generatoarelor s''_3 și s''_4 . Se duc linii de ordine din n' până la s_3 și s_4 și se obțin n și n_1 și până la s''_3 și s''_4 și se obțin n'' și n''_1 . Se determină depărtările $y = 63\text{mm}$ și $y_1 = 20\text{mm}$.

a) Se cunoaște proiecția laterală t'' , pentru determinarea proiecțiilor pe $[H]$ și pe $[V]$ se construiesc proiecțiile laterale ale generatoarelor s''_5 și s''_6 apoi prin rabatare se determină s_5 și s_6 și în continuare s'_5 și s'_6 . Urmărind pe figură,

din t'' se duce linie de ordine, perpendiculara pe $\overline{Oz}$ și se obțin t' și t_1 apoi linii de ordine perpendiculare pe $\overline{Ox}$ și se obțin t și t_1 .

2. Să se construiască intersecția unui cilindru C , având bazele (C_1) și (C_2) , cu un plan de capăt definit de punctele R_x și V . Se dau: $\dot{C}_1(105,75,0)$ cu $r = 25\text{mm}$, $\dot{C}_2(35,35,65)$, $R_x(15,0,0)$, $V(145,0,60)$. Se cere adevărata mărime a secțiunii.

Rezolvare (fig. 2)

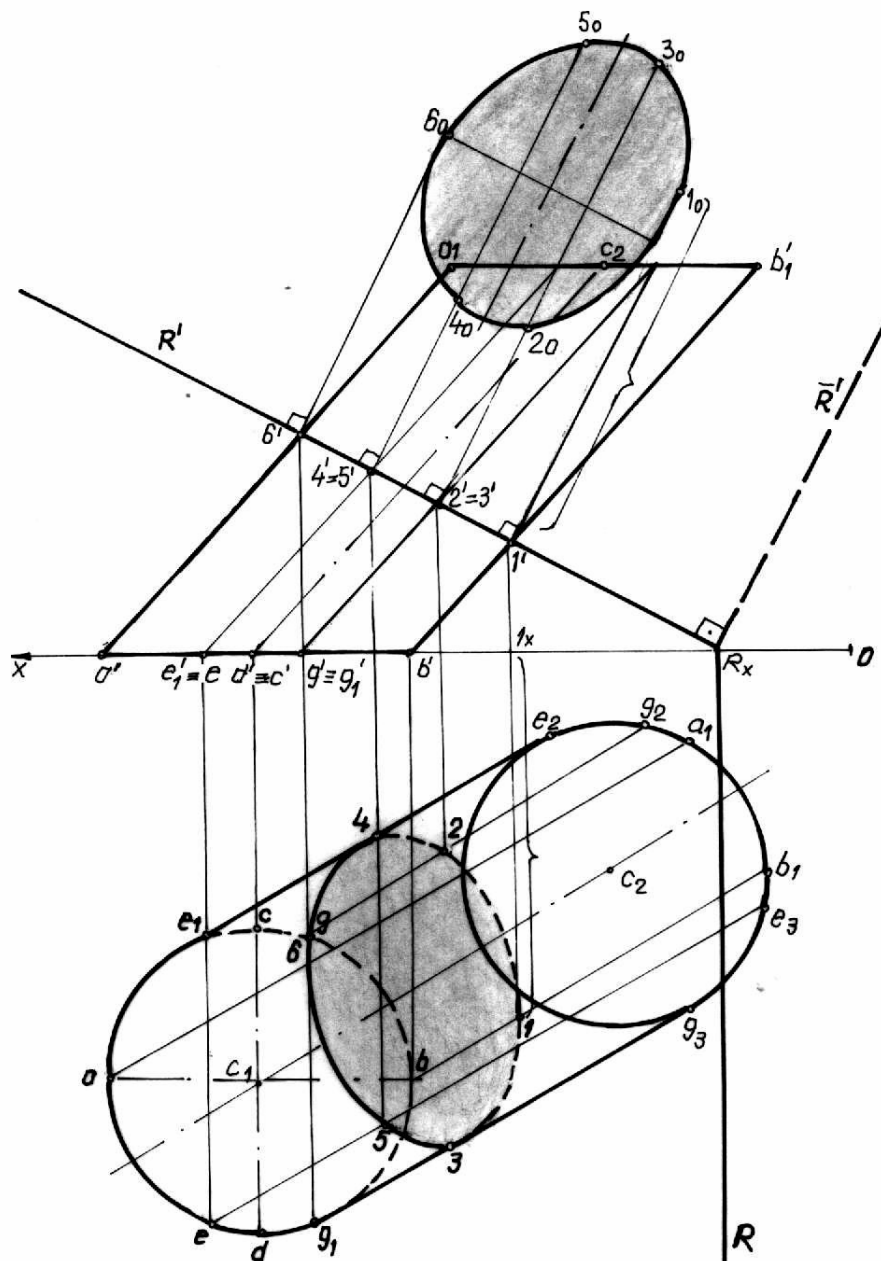


Fig.2

S-au ales șase puncte $(ABEE_1GG_1)$ pe cercul de bază (C_1) și s-au construit punctele $(1,2,...6)$, în care generatoarele $(AA_1BB_1....G_1G_3)$ intersectează planul $[R]$. Deci se procedează asemănător ca la prismă. Astfel $\overline{R'} \cap BB_1 \Rightarrow 1'$, ducând linie de ordine din $1'$ până la bb_1 se obține punctul 1, deci s-a determinat punctul $1(1,1')$ al secțiunii (elipsei) cerute. Analog se determină celelalte puncte ale elipsei $E(e,e'): e' \Rightarrow (1',2',....6')$ și $e \Rightarrow (1,2,...6)$. Adevărata mărime a secțiunii $E_0 = (1_0,2_0....6_0)$, se determină utilizând rabaterea pe planul $[V]$; de exemplu punctul $1(1,1')$ se rabate pe $[V]$ în 1_0 , astfel: din $1'$ se duce o direcție perpendiculară pe $\overline{R'}$, se ia $1'1_0 = 1_x1$, etc.

3. Să se construiască intersecția între cilindrul oblic (O_1O_2) și dreapta oarecare EF . Se dau: $\vec{O}_1(90,30,0), \vec{O}_2(25,55,65)$, raza bazei $r = 20mm$, $\vec{E}(85,65,40), \vec{F}(45,25,12)$.

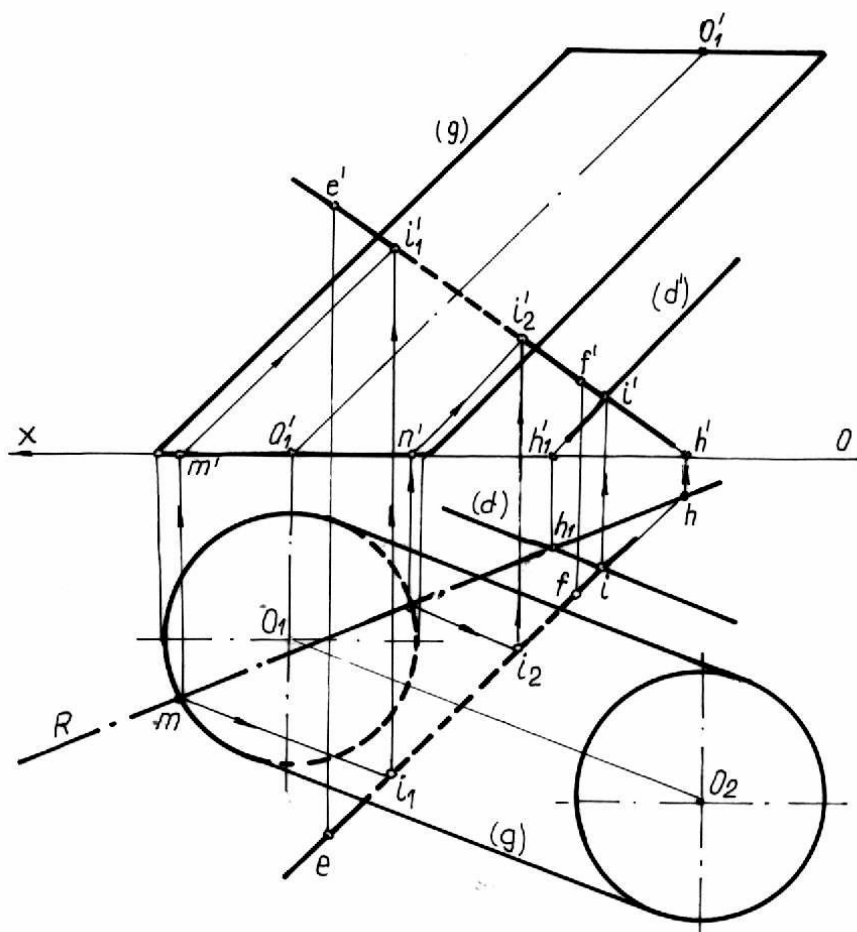


Fig.3

Rezolvare (fig. 3)

Problema se rezolvă asemănător intersecțiilor de poliedre cu drepte. Planul $[R]$ care conține dreapta s-a ales astfel încât, să fie paralel cu generatoarele cilindrului s-a ales punctul $I(i,i') \in \overline{EF}$; prin I s-a dus dreapta $D(d,d'), d \parallel g, d' \parallel g'$. Dreptele

concurente D și EF determină un plan R , paralel cu generatoarele cilindrului și cu ajutorul urmelor orizontale h și h_1 ale celor două drepte se obține urma orizontală $\overline{R_x R}$ a planului R . Urmă orizontală $\overline{R}$ taie baza cilindrului cu centrul în O_1 în punctele $M(m, m')$, $N(n, n')$. Generatoarele duse din punctele M și N sunt dreptele după care planul auxiliar $[R]$ intersectează cilindrul (sunt coplanare cu dreapta EF) deci punctele $I_1(i_1, i_1')$ și $I_2(i_2, i_2')$ sunt punctele cerute, iar $I_1 I_2$ este segmentul din dreapta care traversează cilindrul. Vizibilitatea este redată în figură.

• **Probleme propuse spre rezolvare**

4. Să se construiască unui con circular drept cu baza situată în planul orizontal de proiecție cu centrul $\dot{O}(55, 35, 0)$, raza $r=25mm$ și vârful $\dot{S}(55, 35, 70)$. Punctele $\dot{E}(60, y, 30)$ și $\dot{F}(40, 45, z)$ aparțin conului. Să se construiască epura punctelor E și F .

5. Se dă conul circular drept cu centrul bazei $\dot{O}(40, 20, 0)$, $r=20$, $h=40mm$. Să se construiască epura secțiunii făcută în con de un plan paralel cu generatoarea SA (punctul A aparține conturului bazei).

6. Să se construiască epura secțiunii făcută într-un con drept, având baza un cerc conținut în planul orizontal de proiecție cu un plan de capăt R , determinat de punctele R_x și V . Se dau: $\dot{S}(80, 45, 65)$ - vârful conului, $\dot{O}(80, 45, 0)$ - centrul cercului de bază, $r=30mm$, $\dot{R}_x(120, 0, 0)$, $\dot{V}(30, 0, 55)$.

7. Să se construiască intersecția dintre conul (S) având baza un cerc de centru $\dot{O}$, conținut în $[H]$ cu planul de poziție oarecare $[P]$ definit de punctele P_x , H , S . Se dau: $\dot{S}(70, 100, 100)$, $\dot{O}(130, 60, 0)$, $r=40mm$, $\dot{P}_x(160, 0, 0)$, $\dot{H}(115, 65, 0)$.

8. Se dă cilindrul fronto-orizantal cu centrul în $\dot{O}(0, 40, 30)$ și raza cercului de bază $R=20mm$. Să se construiască secțiunile plane obținute la intersecția acestuia cu un plan de nivel de cota $z=40mm$ și cu un plan de profil P cu $\dot{P}_x(50, 0, 0)$.

9. Să se determine adevărata mărime a secțiunii plane obținută într-un con circular de bază $R=20mm$, centrul cercului de bază $\dot{O}(0, 50, 50)$ și vârful $\dot{S}(70, 0, 10)$ la intersecția acestuia cu un plan de front aflat la 35mm de planul vertical de proiecție.

10. Se dă cilindrul fronto-orizantal prin: centrul cercului de bază $\dot{O}(0, 30, 30)$, raza cercului de bază $R=20mm$, înălțimea $I=70mm$. Să se construiască punctele în care cilindrul este intersectat de o dreaptă de profil $D(d, d', d'')$ ale cărei urme sunt: $\dot{H}(40, 60, 0)$ și $\dot{V}(40, 0, 70)$.

11. Fie conul circular oblic dat prin: centrul bazei $\dot{O}(30, 0, 50)$, raza conului $r=20mm$, vârful conului $\dot{S}(110, 60, 0)$. Să se construiască epura punctelor de intersecție dintre con și dreapta D data prin punctele: $\dot{H}(40, 40, 0)$ și $\dot{V}(90, 0, 60)$.

Cap 7. Sfera

- Sfera este un corp de rotație, obținut prin rotația unui cerc în jurul unuia dintre diametre. Proiecția sferei pe orice plan de proiecție, în sistemul dublu sau triplu ortogonal, este un cerc, egal cu cercul mare al sferei, care are același centru și aceeași rază ca sfera. Planele de nivel ce intersectează sfera determină cercuri – paralele de nivel – iar planele de front – paralele de front. Cu ajutorul acestor paralele se determină epura unor puncte de pe suprafața sferei. Planele tangente la sferă la într-un punct de pe suprafață sunt perpendiculare pe raza sferei ce trece prin punctul ales.

Secțiuni plane în sferă se obțin cu plane oarecare, fie cu plane proiectante, în acest scop utilizându-se plane auxiliare (de nivel sau de front). Tangenta la curba de secțiune într-un punct curent $M(m, m', m'')$ de pe această curbă este dreapta de intersecție dintre planul secant și planul tangent la sferă dus prin punctul M .

Punctele de intersecție dintre o dreaptă și o sferă se determină cu ajutorul planelor auxiliare alese funcție de particularitatea problemei.

- **Obiective**

- Să determine epura unei sfere dată prin coordonatele centrului și rază;
- Să determine cercurile paralele de nivel și paralele de front;
- Să determine urmele planului tangent la sferă într-un punct dat de pe suprafața sferei;
- Să construiască proiecțiile secțiunii făcută în sferă cu un plan particular;
- Să construiască proiecțiile secțiunii făcute în sferă cu un plan oarecare;
- Să determine tangenta la curba secțiune într-un punct curent al curbei;
- Să determine punctele de intersecție dintre o dreaptă oarecare și o sferă, utilizând ca plan auxiliar un plan proiectant;
- Să determine punctele de intersecție dintre o dreaptă oarecare și o sferă, utilizând ca plan auxiliar, un plan determinat de dreapta dată și centrul sferei;
- Să determine punctele de intersecție dintre o dreaptă particulară și o sferă.

7.1. Definiții. Reprezentare. Determinarea unui paralel.

Sfera este locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de un punct fix care este centrul sferei.

Lungimea constantă care măsoară distanța de la un centru la oricare punct al suprafeței se numește raza sferei.

Sfera este o suprafață de gradul al doilea și poate fi definită și ca suprafață ce ia naștere din rotația unui cerc în jurul unuia din diametre.

Orice plan care trece prin centrul sferei intersectează sfera după un cerc care este numit **cerc mare al sferei** și care are același centru și aceeași rază ca sfera.

În dubla proiecție ortogonală, sfera se reprezintă prin cele două contururi aparente orizontal și vertical, care sunt cercuri egale cu un cerc mare al sferei.

Conturul aparent orizontal al sferei este proiecția orizontală a cercului mare orizontal al sferei (ecuatorul) și conturul aparent vertical este proiecția verticală a cercului mare de front al sferei (meridianul principal).

Orice altă secțiune în sferă cu un plan care nu trece prin centrul sferei este un cerc al cărui centru este proiecția centrului sferei pe planul de secțiune și a cărui rază este cateta unui triunghi dreptunghic, care are ca ipotenuză raza sferei, iar drept cealaltă catetă distanța de la centrul sferei la plan.

Acest cerc este real numai dacă această distanță este mai mică sau cel mult egală cu raza sferei.

Ca la orice suprafață de rotație, secțiunile în sferă prin planele de nivel se numesc cercuri paralele de nivel (în cazul sferei se disting și paraleli de front) iar secțiunile în sferă prin planele verticale care trec prin centrul sferei sunt cercuri meridian egale cu un cerc mare al sferei.

Să se determine un paralel orizontal (sau de front) al unei sfere cunoscând fie cota l (depărtarea) sa, fie raza sa r .

S-a arătat că paraleli sferei i sunt cercurile sferei ale căror plane sunt paralele cu unul din planele de proiecție. Având cota l a paralelului (fig. 116) se obține proiecția verticală $a'b'$ a sa, secționând sfera cu planul de nivel H' . Acest paralel întâlnește conturul aparent vertical al sferei în punctele $A(a,a')$ și $B(b,b')$. Proiecția orizontală a paralelului este și cercul de centrul ω și de rază $\omega a = \omega b$. Analog se procedează și pentru paralelul de front.

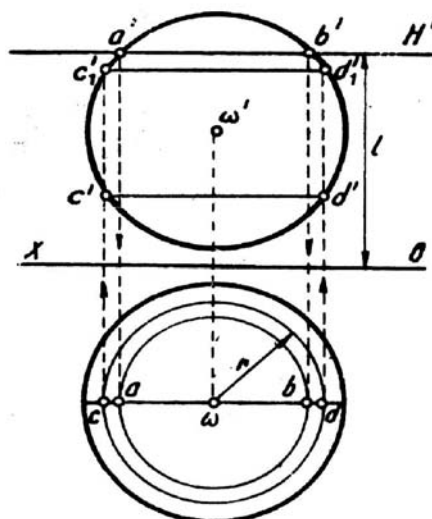


Fig. 116

Paralelului de rază r dată în proiecția orizontală îi corespund două proiecții verticale, și anume $c'd'$ și $c_1'd_1'$.

7.2. Punct pe suprafață. Planul tangent într-un punct pe suprafață.

Să se determine proiecția orizontală m a unui punct M situat pe o sferă dată, cunoscând proiecția sa verticală m' , și să se construiască planul tangent la sferă în punctul $M(m,m')$.

Se consideră paralelul de nivel $a'b'$, care se obține în proiecția verticală ducând prin m' o paralelă la linia de pământ (fig. 117). Proiecția lui orizontală este cercul de rază ωa , descris cu centrul în ω . Coborând linia de ordine din m' , se obțin proiecțiile orizontale m și m_1 care corespund aceleiași proiecții verticale.

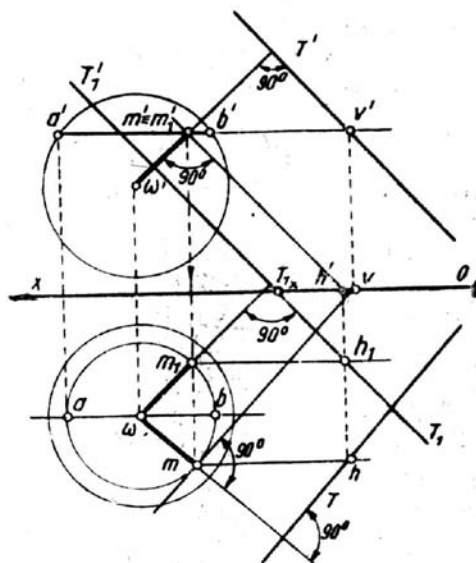


Fig. 117

Planul tangent la sferă în punctul $M_1(m_1, m_1')$ este perpendicular pe raza $(\omega m_1, \omega' m_1')$. Urma lui orizontală T_1 trece prin urma orizontală (h_1, h_1') a frontalei dusă prin punctul $M_1(m_1, m_1')$, perpendiculară pe raza $(\omega m_1, \omega' m_1')$. Rezultă T_{1x} , și urma verticală T_1' paralelă cu $h'm$.

Analog se determină planul tangent T în punctul $M(m, m')$. Deoarece T_x nu este situat în cadrul epurei, se utilizează orizontala $(mv, m'v')$, pentru a preciza proiecția urmei verticale T' .

7.3 Secțiune printr-un plan proiectant

Să se determine proiecția curbei de intersecție dintre o sferă și un plan de capăt, tangenta într-un punct curent $M(m, m')$ al curbei secțiune și arcele secțiunii.

Fie (ω, ω') centrul sferei și PP' planul de capăt dat (fig. 118).

Cercul de secțiune se proiectează pe planul vertical total deformat după segmentul $a'b'$, așternut pe urma verticală P' . Proiecția orizontală a acestui cerc este o elipsă, care este tangentă în r și s conturului aparent orizontal al sferei. Proiecția verticală a centrului cercului este $c' \equiv e'$ și se obține ducând perpendiculara din ω' pe $a'b'$.

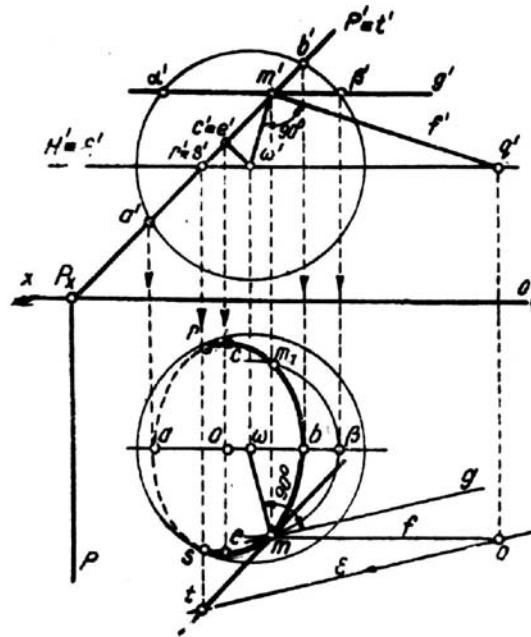


fig. 118

Axa mică a elipsei este proiecția ab a diametrului cercului dirijat după linia de cea mai mare pantă a planului P față de planul orizontal de proiecție. Ea se obține coborând linii de ordine din a' și b' .

Axa mare a elipsei este proiecția orizontală ce a diametrului orizontal (de capăt al cercului, care se proiectează vertical în $c' \equiv e'$). Deoarece $(ab, a'b')$ este un diametru de front al cercului, rezultă că $ce = a'b'$. Tangenta într-un punct curent $M(m, m')$ al curbei de secțiune este dreapta de intersecție dintre planul secant și planul tangent la sferă în acest punct, plan tangent care se determină cu o orizontală $G(g, g')$ și cu o frontală $F(f, f')$ perpendiculare pe raza $(\omega m, \omega' m')$ în punctul $M(m, m')$. Planul de nivel H' al centrului sferei determină în planul secant P dreapta de capăt $(rs, r' \equiv s')$, iar în planul tangent la sferă, orizontală $(\varepsilon, \varepsilon')$, obținută ducând ε prin q , paralelă cu g . Proiecția orizontală a tangentei la curba de secțiune în punctul curent M este tm , iar proiecția sa verticală coincide cu P' .

În mod absolut analog se construiesc proiecțiile curbei de intersecție dintre o sferă și un plan vertical sau paralel cu linia de pământ.

7.4 Secțiunea printr-un plan oarecare

Să se determine proiecțiile curbei de intersecție dintre o sferă și un plan oarecare și să se găsească tangenta într-un punct curent $M(m, m')$ al curbei de secțiune.

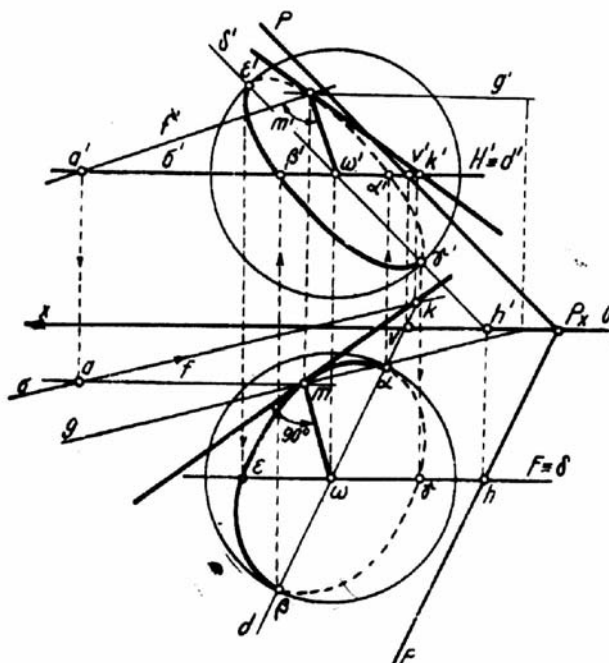


fig. 119

Se consideră sfera de centru (ω, ω') și planul P dat prin urme (fig.119).

Planul de nivel H' dus prin centrul sferei determină în planul P orizontala $D(d, d')$, iar în sferă cu un cerc mare, care se proiectează orizontal după conturul aparent orizontal al sferei. Se obțin proiecțiile α și β , care se ridică în α' și β' . Analog se obțin punctele (γ, γ') și (ϵ, ϵ') , la intersecția conturului aparent vertical cu frontala $D(\delta, \delta')$, determinată de planul de front F , dus tot prin centrul sferei. Variind pozițiile planelor H' și F se pot obține alte puncte ale curbei de secțiune.

Tangenta la curba de secțiune într-un punct curent $M(m, m')$ de pe această curbă este dreapta de intersecție dintre planul secant P și planul tangent la sferă dus prin punctul M , plan tangent care se definește cu orizontala (g, g') și cu frontala (f, f') , ambele perpendiculare pe raza $(\omega m, \omega m')$ în punctul M . Pentru a efectua intersecția acestor două plane se utilizează ca plan auxiliar planul H' , care întâlnește planul tangent după orizontala (σ, σ') , dusă prin punctul (a, a') paralelă cu (g, g') . Punctul (k, k') de intersecție dintre orizontalele (σ, σ') și (d, d') împreună cu punctele (m, m') determină proiecțiile tangentei $(mk, m'k')$ căutate.

7.5 Intersecția dintre o dreaptă și o sferă

Se vor considera mai multe situații diferite, atât ca metodă cât și ca poziție a dreptei în raport cu sfera sau cu planele de proiecție.

1. Să se determine proiecțiile punctelor de intersecție dintre o sferă și o dreaptă $D(d, d')$ paralelă cu linia de pământ sau de poziție $(ab, a'b')$.

Planul de nivel H' dus prin dreapta D (fig. 120) secționează sfera după paralelul care se proiectează vertical după segmentul $m'n'$, iar orizontala după un cerc de rază $o'm' = o'n'$, concentric cu conturul aparent orizontal al sferei. Proiecția orizontală d a dreptei D intersectează acest cerc în α și β , care se ridică respectiv în α' și β' . Punctele (α, α') și (β, β') sunt punctele de intersecție căutate.

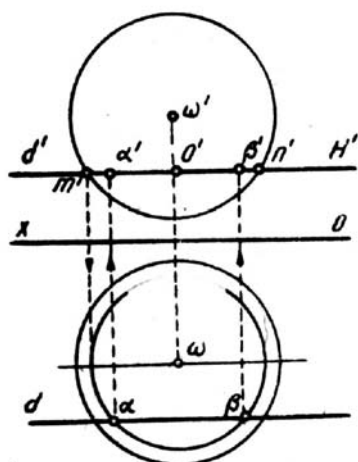


Fig.120

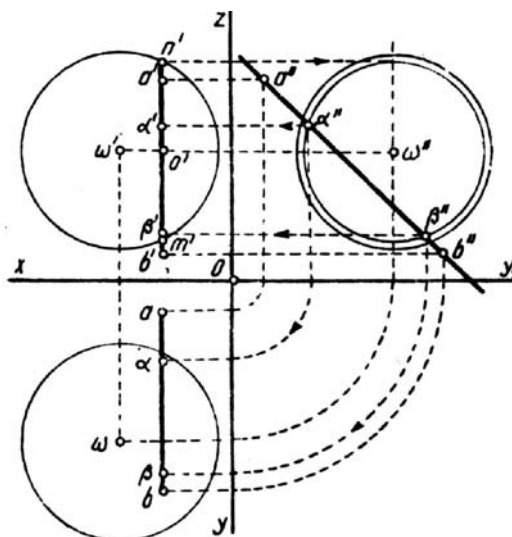


Fig.121

Planul de profil al dreptei de profil ($ab, a'b'$) secționează sfera după cercul de rază $o'm' = o'n'$, care se proiectează în adevărata mărime pe planul lateral de proiecție (fig.121). Acest cerc intersectează în α'' și β'' proiecția pe planul lateral al dreptei de profil date. Rezultă astfel punctele (α, α') și (β, β') de intersecție căutate.

2. Să se determine proiecțiile punctelor de intersecție dintre o dreaptă $D(d, d')$ și o sferă, utilizând ca plan auxiliar planul P , determinat de dreapta D și centrul sferei.

Acest plan secționează sfera, după un cerc mare, care este întâlnit de dreapta D în punctele căutate (α, α') și (β, β') (fig. 122).

Pentru aceasta se rabate dreapta și cercul pe planul de nivel H' al centrului sferei, luând ca axă de rabatere orizontala $D(\delta, \delta')$, care trece prin centrul sferei și prin punctul $A(a, a')$. Centrul obținut ca secțiune în sferă prin planul P coincide după rabatere cu conturul aparent orizontal al sferei. Punctul a rămâne propriul său rabăut, iar punctul oarecare $B(b, b')$ de pe dreaptă se rabate în b_0 , astfel încât rabaterea dreptei D este d_0 . Se obțin punctele de intersecție rabătute α_0 și β_0 care se întorc din rabatere și dau punctele (α, α') și (β, β') .

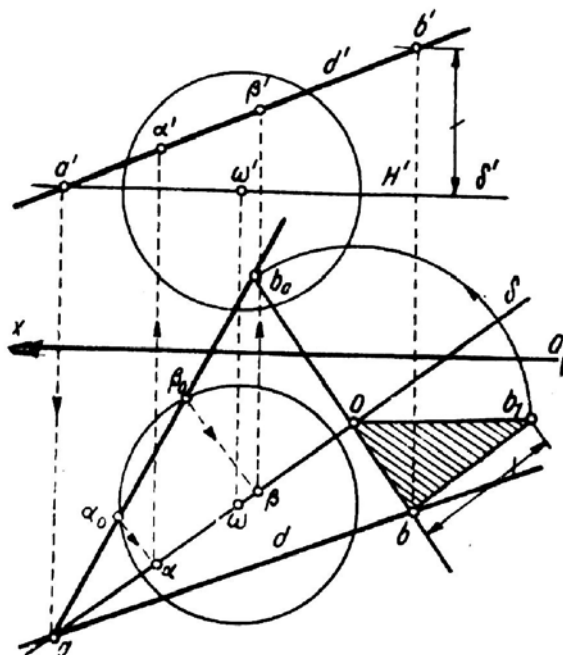


Fig.122

3. Să se determine proiecțiile punctelor de intersecție dintre o dreaptă $D(d, d')$ și o sferă, utilizând ca plan auxiliar planul vertical P , dus prin dreapta D .

Planul vertical P secționează sfera după un cerc a cărui proiecție orizontală este segmentul mn , așternut pe urma orizontală a planului, iar proiecția verticală este o elipsă care nu va fi contruită (fig.123).

Punctele de intersecție dintre dreapta D și acest cerc sunt punctele căutate (α, α') și (β, β') , în care dreapta întâlnește sfera. Pentru a le determina se efectuează rabaterea cercului și a dreptei împreună cu planul vertical P , pe planul de nivel H' al centrului sferei. Punctul $A(a, a')$ rămâne propriul său rabătut, iar un punct arbitrar $B(b, b')$ de pe dreaptă se rabate în b_0 . Cercul de secțiune se rotește în jurul diametrului său mn . Se obțin rabaterile α_0 și β_0 ale punctelor de intersecție căutate, care se întorc din rabatere în (α, α') și (β, β') .

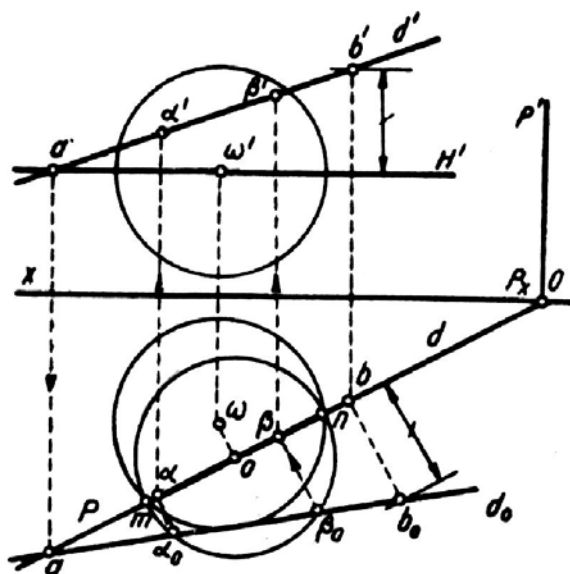


Fig.123

4. Să se determine proiecțiile punctelor de intersecție dintre o sferă și o dreaptă $D(d, d')$ care trece prin centrul (ω, ω') ale sferei.

Orice plan auxiliar dus prin dreapta D secționează sfera după un cerc mare (fig.124). Problema poate fi rezolvată așezând pe dreapta o lungime egală cu raza sferei și cu o extremitate în centrul sferei. Se consideră planul vertical dus prin dreapta D ca un nou plan vertical de proiecție și se obțin α_1' și β_1' la intersecția cercului mare al sferei cu noua proiecție verticală d_1' a drepte. Rezultă punctele (α, α') și (β, β') în care dreapta intersectează sfera.

Observație: În schimbarea de plan vertical de proiecție făcută s-au redus toate cotele cu cota planului de nivel H' dus prin centrul sferei. De fapt, aceasta se reduce la o rabatere a planului vertical dus prin dreapta D , pe planul de nivelul H' al centrului sferei.

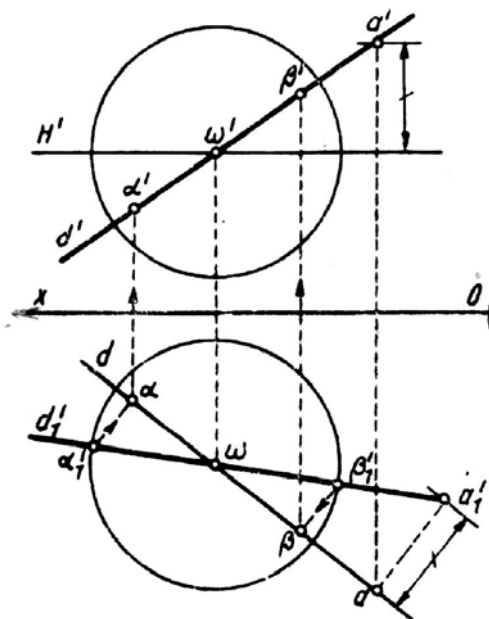


Fig.124

• **Idei de reținut**

- Conturul aparent orizontal al sferei este ecuatorul (cercul mare orizontal al sferei), conturul aparent vertical este proiecția verticală a cercului mare de front al sferei – meridianul principal;

- Secțiunea făcută în sferă cu un plan care nu trece prin centrul sferei este un cerc al cărui centru este proiecția centrului sferei pe planul de secțiune și a cărui rază este cateta unui triunghi dreptunghic, care are ca ipotenuză, raza sferei, iar drept cealaltă catetă, distanța de la centrul sferei la plan;

- Proiecțiile secțiunilor făcute de plane oarecare în sferă sunt elipse ale căror axe se determină cu ajutorul planelor auxiliare de nivel sau de front.

• Probleme rezolvate

1. Să se construiască proiecția orizontală a secțiunii determinate de planul de capăt P pe suprafața sferei cu centrul în Ω (fig 1)

Rezolvare:

Secțiunea determinată de un plan pe suprafața unei sfere are forma unui cerc. Planul fiind înclinat față de planul orizontal, cercul se va proiecta ca o elipsă. Planul P fiind proiectant pe planul vertical, secțiunea se va proiecta total deformată după segmentul $a'b'$. Proiecția orizontală ab reprezintă axa mică a elipsei. Pentru a determina axa mare a elipsei, se consideră mijlocul segmentului $a'b'$ prin care se duce planul de nivel N . Planul de nivel secționează sfera după un cerc, care se proiectează pe planul orizontal tot ca un cerc, iar cu planul P , se intersectează după o dreaptă de capăt. La intersecția cercului cu dreapta de capăt, se obțin punctele $\dot{C}(c, c')$ și $\dot{D}(d, d')$, iar segmentul cd reprezintă axa mare a elipsei. În mod analog, se reprezintă și alte puncte, care, prin unire, redau proiecția orizontală a secțiunii.

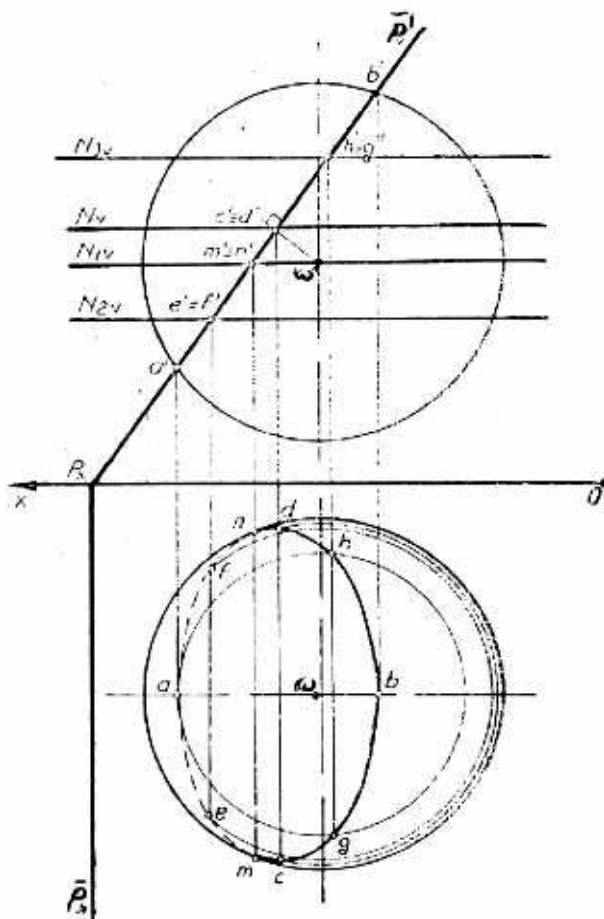


Fig 1

2. Să se construiască intersecția sferei de centru $\dot{C}(90,55,70)$, raza $r=40\text{mm}$ cu dreapta D care trece prin punctele $\dot{M}(160,18,15)$ și $\dot{N}(90,65,95)$.

Rezolvare: (fig. 8.2)

Se utilizează ca plan auxiliar, planul de capăt R care conține dreapta dată D . Se determină secțiunea făcută de planul R în sfera dată, care este un cerc conținut în $[R]$; proiecția orizontală a secțiunii este o elipsă ale cărei puncte (1,2,...,8) au fost determinate utilizând planele de nivel (N_1, N_2, N_3) ca în figură (determinarea punctelor conturului secțiunii se face ca în problema precedentă). Punctele de intersecție ale dreptei cu sfera sunt $\dot{A}(a, a')$, $\dot{B}(b, b')$. Vizibilitatea dreptei este redată în figură.

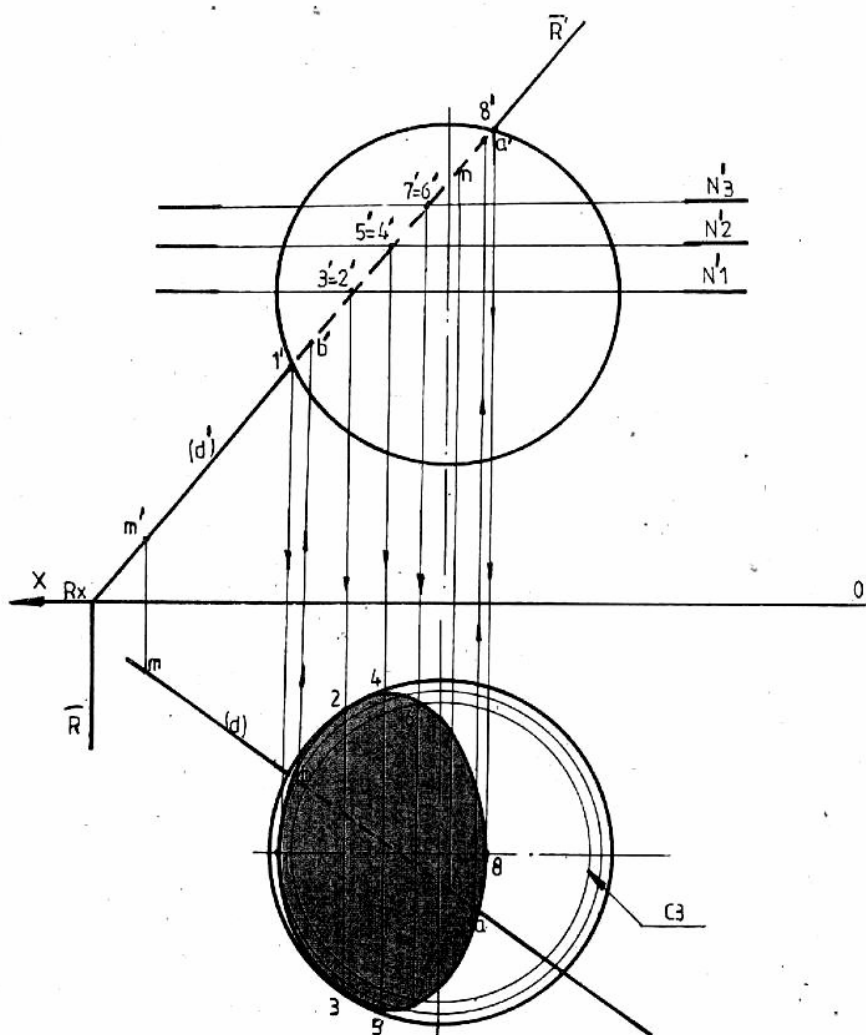


Fig..2

• Probleme propuse spre rezolvare

3. Se dă o sferă de centru $\dot{O}(95,80,55)$ cu raza $r=45mm$. Se cere să se construiască secțiunea determinată de un plan vertical R , definit de punctele $R_x(20,0,0)$ și $\dot{M}(50,45,0)$.

4. Să se construiască intersecția sferei de centru $\dot{C}(85,45,35)$ și raza $r=32mm$ cu planul de capăt R definit punctele $\dot{R}_x(55,0,0)$ și $\dot{V}(125,0,55)$.

5. Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta D ce trece prin punctele M și N și sfera de centru $\dot{O}(90,55,70)$ și raza $r=40mm$. Se dau: $\dot{M}(160,18,15)$ și $\dot{N}(90,65,95)$.

6. Să se determine mărimea adevărată a secțiunii plane obținută într-o sferă dată la intersecția acesteia cu un plan vertical P , a cărui urmă verticală taie conturul aparent vertical al sferei.

7. Să se construiască printr-o dreaptă dată $D(d, d')$ un plan tangent la o sferă de centru (ω, ω') și rază R .

8. Să se construiască intersecția unei sfere de centru $\dot{O}(95,45,55)$, raza $r=42mm$, cu orizontala AB având $\dot{A}(65,85,75)$ și $\dot{B}(145,5,75)$ și cu frontala MN având $\dot{M}(120,75,105)$ și $\dot{N}(45,75,5)$.

Cap 8. Precizări privind necesitatea cunoștințelor de geometrie descriptivă în dobândirea și înțelegerea informațiilor din cuprinsul disciplinelor parcurse în pregătirea viitorilor ofițeri de marină.

În introducerea acestei lucrări sunt enumerate disciplinele care operează cu noțiuni însușite la disciplina „geometrie descriptivă”. În continuare se face referire la „Mecanica navei” și „Navigația maritimă”.

În disciplina „Mecanica construcției navei” primul capitol este intitulat „Geometria navei”.

Corpul navei este considerat un solid rigid cu geometrie complexă. Studiul teoretic al calităților nautice impune introducerea unor caracteristici geometrice potrivite, cu ajutorul cărora se pot stabili relațiile matematice, care descriu diferitele fenomene fizice. În acest sens se introduce noțiunea **suprafață teoretică a navei**.

Prezentarea de față nu-și propune să definească noțiunile specifice disciplinei MCN ci să scoată în evidență noțiunile cunoscute la geometria descriptivă și aplicate în capitolul „Geometria navei”.

Pentru studiul teoretic al geometriei corpului navei se utilizează trei plane de proiecție principalele și un plan de proiecție auxiliar (fig. 125).

Planul diametral PD este un plan vertical longitudinal care împarte corpul navei în două părți simetrice. El este similar planului vertical de proiecție din sistemul de proiecție triortogonal studiat în geometria descriptivă [V].

Planul transversal al cuplului maestru este un plan transversal vertical, care trece prin secțiunea maestru și împarte corpul navei în două părți nesimetrice: partea prova P_V și partea pupa P_P . El este similar planului lateral de proiecție [W] al sistemului de proiecție triortogonal.

Planul plutirii PL este un plan orizontal longitudinal care coincide cu suprafața liberă a apei liniștite și împarte corpul navei în două părți nesimetrice: partea imersă și partea emersă. El este similar planului orizontal de proiecție [H] al sistemului de proiecție triortogonal.

Planul de proiecție auxiliar - utilizat în studiul teoretic al geometriei corpului navei este planul de bază PB. Planul de bază PB este un plan longitudinal, orizontal (de nivel) care trece prin punctul obținut din intersecția PD, Φ și LK. Urmele planului PB și PD și Φ sunt drepte particulare: orizontal respectiv de capăt.

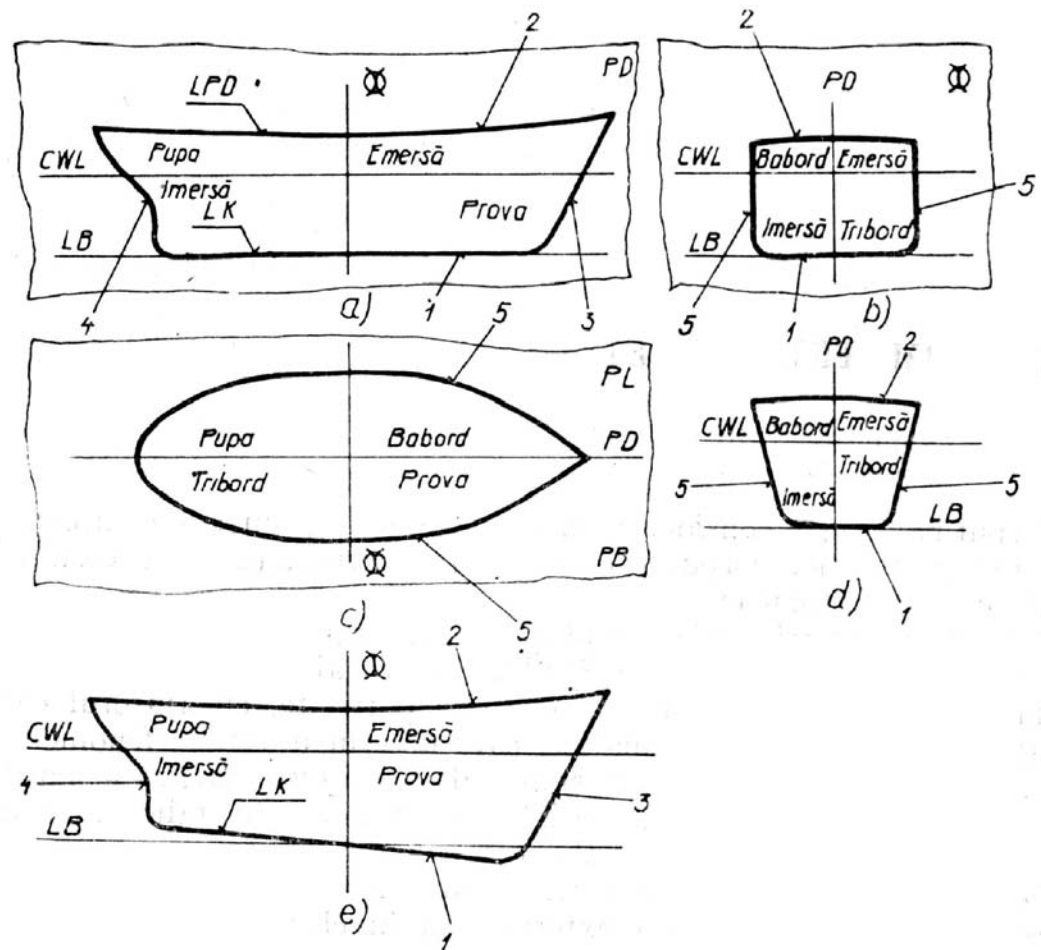


fig. 125

Cunoașterea modului de determinare și reprezentare a secțiunilor plane în corpurile geometrice și se utilizează în construirea planului de forme.

Planul de forme este reprezentarea grafică prin secțiuni longitudinale, transversale și orizontale a suprafeței teoretice a corpului navei.

Planele de secțiune sunt plane particulare și anume plane de nivel, de front sau de profil.

O altă disciplină în care cunoașterea elementelor de geometrie descriptivă și se utilizează este „Navigația maritimă”.

Capitolul care inițiază „Tratatul de navigație maritimă” este „Pământul și navigația”.

În studiul metodelor de determinare a poziției navei pe mare și a drumului de urmat în siguranță dintr-un punct în altul pe suprafața Pământului este necesară cunoașterea reprezentării plane elipsoidale terestre asimilate

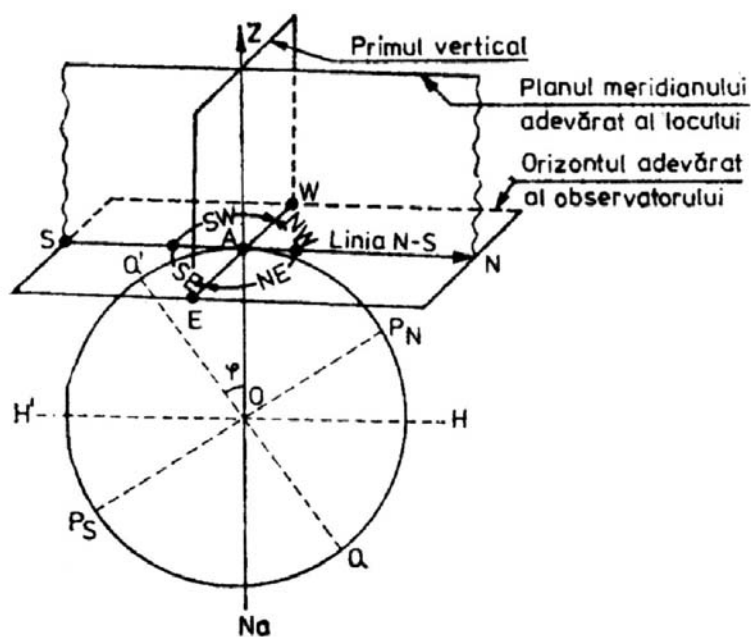


Fig. 127

În capitolul „H ri marine” sunt prezente cunoștințele însușite la geometria descriptivă.

În proiecția gnomonică polară, planul de proiecție este tangent la unul din poli sferii terestre (fig. 128a).

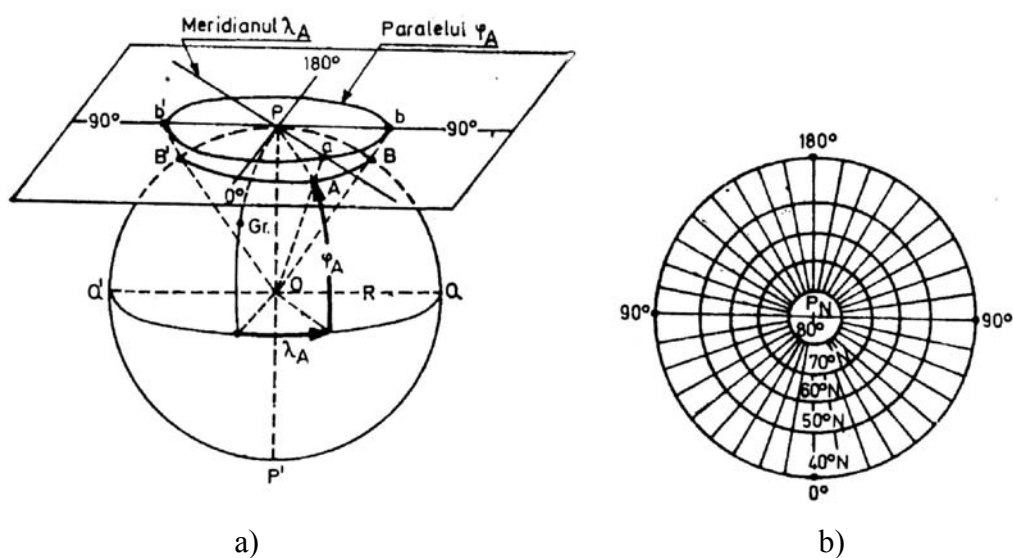


Fig. 128

Meridianele apar ca drepte de intersecție dintre planul de proiecție cu conul de rotație drept cu vârful în O , determinat de totalitatea razelor vizuale care pleacă din centrul sferei terestre spre punctele paralelului considerat (fig. 128b).

În proiecțiile stereografice, ochiul observatorului se consideră într-un punct pe suprafața sferei terestre, iar proiecția se efectuează pe un plan tangent la antipod sau pe un plan care trece prin centrul P mântului (fig. 129).

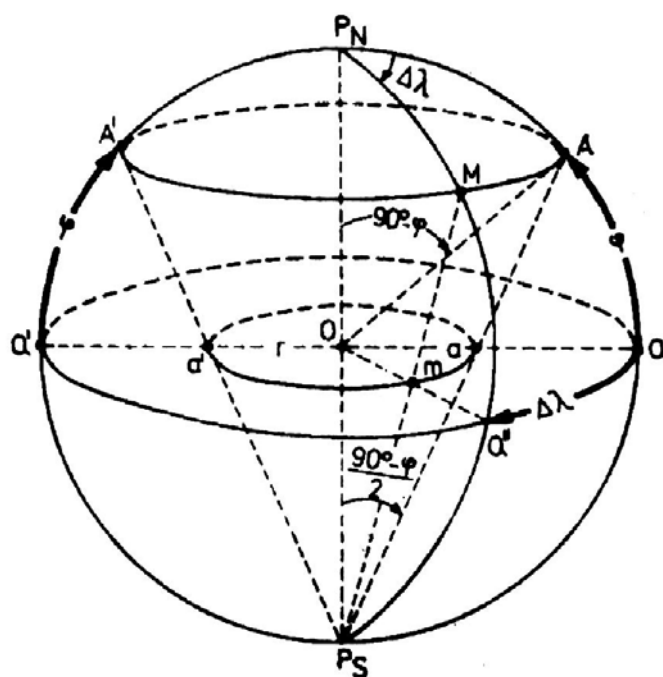


Fig. 129

Despre utilitatea cunoștințelor de geometrie descriptivă la însușirea disciplinelor tehnice se va vorbi la cursurile de desen tehnic care are ca bază teoretică geometria descriptivă.

Prin această succintă prezentare se speră, ca prin impactul imaginilor vizuale ale celor câteva definiții, asupra intelectului studenților, să crească interesul pentru geometria descriptivă.

Bibliografie

Mihail și Botez, *Geometrie Descriptivă*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965

V. Maier, *Mecanica navei*, vol. I, Editura Tehnica, București, 1985

Aurelian Tănăsescu, *Geometrie Descriptivă*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965

Alexandru Matei, Victor Gaba, Tatiana Tacu, *Geometrie Descriptivă*, Editura Tehnică, București, 1982

I. Enache, T. Ivănceanu, V. Buzilă, *Geometrie descriptivă și desen tehnic*, București, 1982

Gh. I. Balaban, *Tratat de navigație maritimă*, Editura Leda, Constanța, 1996

